ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ტუნელური გადასვლების აღწერა ევკლიდური მეთოდებით

საბაკალავრო პროგრამა ''ფიზიკა''
ელემენტარული ნაწილაკების და კვანტური ველების კათედრა

სტუდენტი: *მარიამ ჩიტიშვილი*

ხელმძღვანელი:

გიორგი ლავრელაშვილი, ფიზ.-მათ. მეცნიერებათა დოქტორი, თსუ ა. რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტის თეორიული ფიზიკის განყოფილება.

გიორგი ციციშვილი, ასოცირებული პროფესორი, თსუ ელემენტარული ნაწილაკების და კვანტური ველების კათედრა.

6 ივლისი 2016

სარჩევი

1 ანოტაცია **3**

2 შესავალი **5**

3 ტუნელირების აღწერა ევკლიდური მეთოდებით **7**

3.1 სიმეტრიული პოტენციალური ორმო 7

3.2 ასიმეტრიული პოტენციალური ორმო 10

4 დასკვნა **15**

1 ანოტაცია

ამ ნაშრომში ჩვენ ვსწავლობთ კვანტურ მექანიკური ტუნელირების მოვლენას ევკლიდური მეთოდებით. ტუნელირების შესწავლას საფუძველი დაუდო რადიაქტივობის აღმოჩენამ და შემდგომ მისმა შესწავლამ. ტუნელირების შესახებ პირველი შენიშვნები 1927 წელს ეკუთვნის ფრიდრიხ ჰუნდს. ხოლო მათემატიკურად პირველად 1928 წელს გაფორმდა ალფა დაშლის მაგალითზე ჯორჯ გამოვის მიერ. კვანტური ტუნელირების მოვლენა იმაში მდგომარეობს, რომ დაბალი ენერგიის კვანტურ ნაწილაკს შეუძლია გადალახოს მაღალი ენერგიის პოტენციური ჯებირი, რაც კლასიკური თვალსაზრისით შეუძლებელია. ალფა დაშლა სწორედ ამის მაგალითს წარმოადგენს. ტუნელური გადასვლის აღწერის სტანდარტული მეთოდი შრედინგერის განტოლებაა. თანამედროვე შრომებში კი იგივე პრობლემას ფუნქციონალური ინტერგალების მეთოდებით ხსნიან. ტუნელური გადასვლის ამპლიტუდა გამოისახება ფუნქციონალური ინტეგრალით და მისი გამოთვლა შესაძლებელია უნაგირის მეთოდით ე.წ. ევკლიდურ დროში. ევკლიდურ დროზე გადასვლა ხდება კომპლეკსური გარდაქმნით ($t \to -i\tau$), და მას 'ვიკის მობრუნება' ეწოდება. გადასვლის ამპლიტუდა მოიცემა ევკლიდური ქმედებით S_E , რომელიც არის ინტეგრალი კლასიკური ამოხსნის (ინსტანტონის) გასწვრივ. ევკლიდური მეთოდები მოსახერხებელია იმ თვალსაზრისით, რომ მისი განზოგადოება ადვილია ველის თეორიაზე. ევკლიდური მეთოდები აღიწერება ინსტანტონების დახმარებით, რომელსაც დიდი გამოყენება აქვს ველის კვანტურ თეორიაში. ჩვენ განვიხილავთ ს. კოულმანის მიდგომას [1, 2, 3] ტუნელური გადასვლების შესახებ კვანტურ მექანიკაში.

Abstract

In this work we investigate quantum mechanical tunneling phenomenon with Euclidean methods. Quantum tunneling was developed from the study of radioactivity. Friedrich Hund was the first to take notice of tunneling in 1927. Its first application was a mathematical explanation for alpha decay, which was done in 1928 by George Gamow. Tunneling refers to the quantum mechanical phenomenon where a lower energy particle tunnels through a higher potential barrier that it classically could not surmount. Alpha decay is example of this activity. A standard application method for tunneling is Schrodinger's equation. In modern works same problems are explained by functional integral. tunneling amplitude is defined by finctional integral and it's calculation is possible by method of saddle in so-called Euclidean time. For transfering in Euclidean time we need complex transformation ($t \to -i\tau$) and it calls Wick rotation. Tunneling amplitude is defined by Euclidean action S_E, which is integral over classical solution (instanton). Euclidean methods are convenient because it makes easier to generalize in field theory. Euclidean method is described by instanton, which has a great use in quantum field theory. We will consider S.Coleman's method [1, 2, 3] of approach about tunneling in quantum mechanics.

2 შესავალი

კლასიკურ თეორიაში შესაძლებელია ერთ სისტემას ჰქონდეს ორი დამოუკიდებელი, წონასწორული მდგომარეობა (ვაკუუმი) განსხვავებული ენერგიებით. კვანტურ თეორიაში კი როგორც კი ჩნდება ტუნელირების ალბათობა ორი ერთნაირი მდგომარეობა ანუ გადაგვარება იხსნება და ენერგეტიკული დონეები იხლიჩება. ჩვენ განვიხილავთ ტუნელურ გადასვლებს ორმაგ სიმეტრიულ და ასიმეტრიულ ორმოებში. ასიმეტრიული პოტენციური ორმო უფრო საინტერესოა იმ თვალსაზრისით, რომ გვაქვს ნამდვილი და ყალბი ვაკუუმი. ყალბი ვაკუუმი ვუწოდეთ შედარებით მაღალ ენერგეტიკულ მინიმუმს, ხოლო ნამდვილს გლობალურ ენერგეტიკულ მინიმუმს. ჩვენ განვიხილავთ სისტემის ყალბი ვაკუუმინდან ნამდვილ ვაკუუმში გადასვლებს. ტუნელირებას სტანდარტულად შრედინგერის განტოლებით აღწერენ. ამ თეორიაში არ არსებობს ტრაექტორიის ცნება და მხოლოდ ნაწილაკის პოვნის ალბათობაზე შეგვიძლია საუბარი.ტუნელირების ამოცანების გადაჭრის ალტერნატიული მეთოდები ს.კოულმანს ეკუთვნის, რომელიც იყენებს ფეიმანის ფუნქციონალურ ინტეგრალს ევკლიდურ სივრცე-დროში.

ფეიმანის ინტეგრალი გასვლის ამპლიტუდისთვის მოიცემა:

$$< x_f|exp(\frac{-i}{\hbar}Ht)|x_i >= N\int[dx]exp(\frac{i}{\hbar}S), \tag{1}$$

სადაც x_i არის საწყის ($\frac{-t}{2}$) მომენტში ნაწილაკის მდებარეობა, ხოლო x_f საბოლოო ($\frac{t}{2}$) მომენტში. H არის ჰამილტონიანი, ხოლო ($-iHt$) სისტემის ცვლილების ოპერატორი. [dx]-აღნიშნავს ინტეგრებას ყველა $x(t)$ დასაშვები ტრაექტორიისთვის, რომელიც $\frac{-t}{2}$ მომენტში x_i-ში იმყოფება, ხოლო $\frac{t}{2}$-ში x_f - წერტილში. N-ნორმირების კოეფიციენტია. ხოლო S არის ქმედება, რომელიც ლაგრანჟიანიდან ინტეგრალს წარმოადგენს.

$$S = \int_{t/2}^{-t/2} dt(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - V(x)). \tag{2}$$

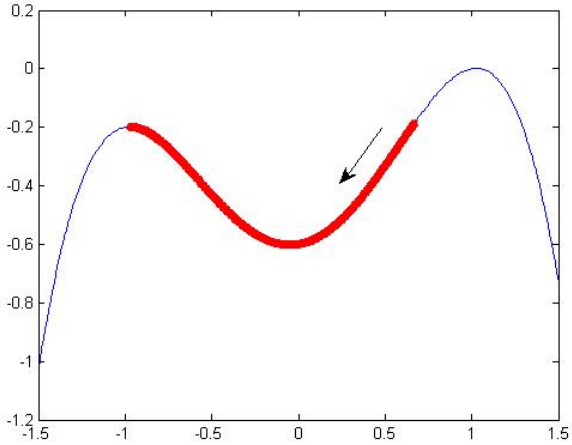
ს. კოულმანის მიდგომა მდგომარეობს იმაში, რომ თუ დროის შემდეგ გარდაქმნას გავაკეთებთ ($t \to -i\tau$) (ვიკის მობრუნება) გადავალთ ლორენცის დრო-სივრციდან (+ - - -) ევკლიდურ დრო-სივრცეში (++++). ამის შემდეგ კი შეგვიძლია გამოვიყენოთ ვიკის მობრუნების შედეგი. განტოლება (1) მიიღებს სახეს:

$$< x_f|exp(\frac{-H\tau}{\hbar})|x_i >= N\int[dx]exp(\frac{-S_E}{\hbar}), \tag{3}$$

სადაც S_E ევკლიდური ქმედებაა.

$$S = \int_{t/2}^{-t/2} d\tau(\frac{1}{2}x'^2 + V(x)). \tag{4}$$

ძირითადი წვლილი ფუნქციონალურ ინტეგრალში (3) მარჯვენა ნაწილში შეაქვთ ტრაექტორიები, რომელზეც ქმედება მინიმალურია. ანუ კვანტურმექანიკური



სურ 1:

ამოცანა დადის მექანიკურ ამოცანაზე. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ნაწილაკის ჭეშმარიტი ტრაექტორია, ინსტანტონი. ინსტანონი არის მოძრაობის განტოლების ამონახსნი სასრული ქმედებით კვანტურ მექანიკასა და ველის კვანტურ თეორიაში.

ქმედება (4) ვარირების შედეგად გვეცვლება მოძრაობის განტოლება:

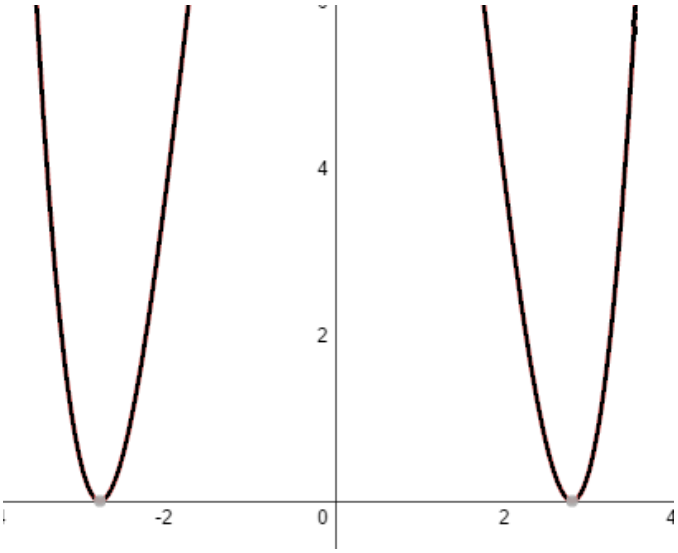
$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{dV}{dx} \tag{5}$$

ანუ საწყისმა პოტენციალმა შეიცვალა ნიშანი და ორმაგი ორმოს მაგივრად გვაქვს შემდეგი სახის პოტენციალი, სურ (1) და ვეძებთ სურათზე წითლად გამოსახულ ტრაექტორიას ნაწილაკისთვის.

3 ტუნელირების აღწერა ევკლიდური მეთოდებით

3.1 სიმეტრიული პოტენციალური ორმო

სანამ უშუალოდ თემაზე გადავიდოდეთ განვიხილავთ ტუნელირების მოვლენას და მიდგომას სტანდარტული შრედინგერის განტოლებით. თავდაპირველად განვიხილავთ ორ ერთმანეთისგან დამოუკიდებელ ორმოს სურ. 2:



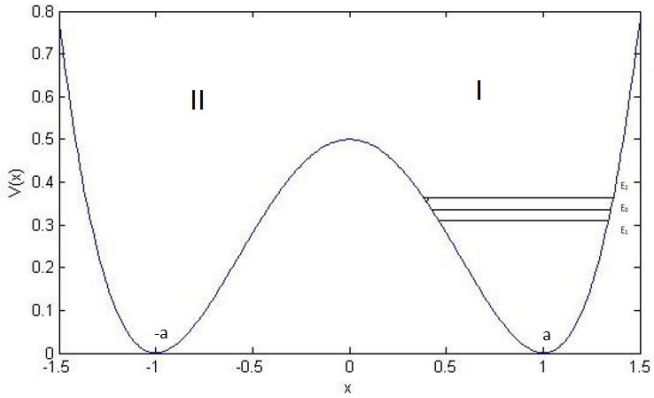
სურ 2:

თუ ორმოებს შორის ბარიერი უსასრულოდ მაღალი ან უსასრულოდ სქელია ტუნელური გადასვლის ალბათობა უდრის ნოლს. ამიტომ ორივე ორმოში გვექნება E_0 ენერგეტიკული დონე და შესაბამისად გვექნება გადაგვარება. თუმცა როგორც კი ორმოებს შორის ბარიერი მცირდება და სასრული სიმაღლის და სიგანის ხდება, ჩნდება ერთი ორმოდან მეორეში გასვლის ალბათობა. ვთქვათ ტუნელირება ხდება I ორმოდან II ორმოში, მაშინ მეორე ორმოს არსებობა უკვე შეშფოთებას წარმოადგენს პირველი ორმოსთვის. შეშფოთება ხსნის გადაგვარებას და ამიტომ პირველ ორმოში დონეები იხლიჩება სურ. 3.

ვთქვათ გვაქვს

$$V(x) = \frac{\lambda}{2}(x^2 - a^2)^2 \tag{6}$$

სახის პოტენციალი. შრედინგერის განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი პოტენციალში $V(x)$ არ ითვალისწინებს ბარიერში გასვლის ალბათობას (კვაზიკლასიკური შემთხვევა). როცა გასვლის მცირე ალბათობასაც კი ვითვალისწინებთ E_0 იხლიჩება E_1 და E_2 ენერგეტიკულ დონეებად. ჩვენ შეგვიძლია დავთვალოთ $E_2 - E_1$ ენერგიის განსხვავება. განვიხილავთ ამოცანას ლ. დ. ლანდაუ, ე. მ. ლიფშიცი ''კვანტური მექანიკიდან''(III ტომი) [4]. ნულოვან მიახლოებაში



სურ 3:

ამ დონეების ტალღურ ფუნქციას შეესაბამება სიმეტრიული და ანტისიმეტრიულის კომბინაცია $\psi_0(x)$ და $\psi_0(-x)$

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_0(x) + \psi_0(-x)] \\ \psi_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_0(x) - \psi_0(-x)], \end{aligned} \tag{7}$$

$\psi_0(x)$ შეესაბამებოდა განსაზღვრულ E_0 ენერგიას. პირველ ორმოში $\psi_0(-x) \ll \psi_0(x)$, ხოლო მეორე ორმოში $\psi_0(x) \ll \psi_0(-x)$. ნამრავლი $\psi_0(x)\psi_0(-x)$ ყველგან ძალიან მცირეა, ამიტომ (7) ფუნქციები ისეა ნორმირებული რომ მათი კვადრატებიდან ინტეგრალი პირველი და მეორე ორმოს გასწვრივ იყოს ერთიანი.

შრედინგერის განტოლებები ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} \psi_0'' + (\frac{2m}{\hbar^2})(E_0 - V)\psi_0) &= 0 \\ \psi_1'' + (\frac{2m}{\hbar^2})(E_1 - V)\psi_1 &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

განტოლებაში (8) პირველს ვამრავლებთ ψ_1-ზე, ხოლო მეორეს ψ_0-ზე და ერთმანეთს ვაკლებთ. პოტენციალიანი წევრი გვიბათილდება და გვრჩება.

$$\psi_1''\psi_0 - \psi_0''\psi_1 + \frac{2m}{\hbar^2}\psi_1\psi_0(E_1 - E_0) = 0 \tag{9}$$

ახლა თუ ჩავატარებთ ინტეგრებას 0 დან ∞ მდე იმის გათვალისწინებით, რომ $x = 0$-ში $\psi_1 = \sqrt{2}\psi_0$ ხოლო $\psi_1' = 0$. განტოლება (9) დან $\int_0^\infty \psi_1''\psi_0 - \psi_0''\psi_1 dx = \sqrt{2}\psi_0'\psi_0$, ხოლო $\int_0^\infty \psi_1\psi_0 dx = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ამ გამოთვლების (9) განტოლებაში ჩასმით და $(E_1 - E_0)$-ის გამოსახვით მივიღებთ.

$$E_1 - E_0 = -\frac{\hbar^2}{m}\psi_0'(0)\psi_0(0). \tag{10}$$

შემდეგ ეტაპზე ვითვლით $E_2 - E_0$ იგივე მეთოდით. მივიღებთ $E_2 - E_0 = \frac{\hbar^2}{m}\psi_0'\psi_0$. ახლა უკვე შეგვიძლია ვიპოვოთ $E_2 - E_1$.

$$E_2 - E_1 = \frac{2\hbar^2}{m}\psi_0(0)\psi_0'(0). \tag{11}$$

ტალღური ფუნქციისთვის ვწერთ [4]

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{w}{2\pi v_0}}\exp(-\frac{1}{\hbar}\int_0^a |\sqrt{2m(E - V(x))}|dx) \tag{12}$$

ასევე $\psi_0' = \frac{mv_0\psi_0}{\hbar}$ და $v_0 = \sqrt{\frac{2(U_0 - E_0)}{m}}$. შესაბამის ტოლობებში ჩასმით მივიღებთ

$$E_2 - E_1 = \frac{\hbar w}{\pi}\exp(-\frac{1}{\hbar}\int_{-a}^a \sqrt{2m(E - V(x))}dx) \tag{13}$$

სადაც a არის მობრუნების წერტილი, რომელსაც შეესაბამება ენერგია E_0 , ანუ სიდიდე დამოკიდებულია პოტენციალის სახეზე და ნაწილაკის საკუთარ ენერგიაზე. ინტეგრალის 2-ზე გამრავლების მაგივრად შეგვიძლია ინტეგრების საზღვრები სიმეტრიულით შევცვალოთ. ტუნელირების შემდეგ a წერტილში გამოსული ნაწილაკის კინეტიკური ენერგია უკვე ნულის ტოლია და ის ვრცელდება კლასიკურად. საზღვრები ჩვენ შემთხვევაში 1 და -1-ია. ხოლო w-თვის ადგილი აქვს ტოლობას $V(\pm a)'' = w^2$. აღნიშნული სიდიდეების განტოლება (13)-ში შეტანით ცხადი სახით ვიღებთ ენერგიების სხვაობას.

ენერგიებს შორის სხვაობა $E_2 - E_1$ შეიძლება ჩაიწეროს როგორც $\exp(-S_E)$, სადაც S_E არის ევკლიდური ქმედება და გამოითვლება ინსტანტონის გასწვრივ. ამის ცხადად საჩვენებლად ჩავატარებთ გარდაქმნებს და ვიპოვით ევკლიდურ ანალიზურ ამონახსნს მოცემული პოტენციალისთვის. (13)- განტოლებაში იმპულსის შეტანით გვექნება

$$E_2 - E_1 = \frac{\hbar w}{\pi}\exp(-\frac{1}{\hbar}\int_{-a}^a \sqrt{2V}dx) \tag{14}$$

მეორე მხრივ გვაქვს ევკლიდური ქმედება. $S_E = \int d\tau(\frac{1}{2}x'^2 + V(x))$ ასევე ვიცით, რომ ევკლიდურ სივრცე-დროში ნიუტონის განტოლება იღებს სახეს $x'' = \frac{dV(x)}{dx}$. საიდანაც მივიღებთ ტოლობას $\frac{1}{2}x'^2 = V(x)$. თუ უკანასკნელ თანაფარდობას ქმედებაში გავითვალისწინებთ მივიღებთ $S_E = \int d\tau(V(x) + V(x)) = \int d\tau 2V(x)$. (13) განტოლების იმპულსის მნიშვნელობის გათვალისწინებით ვიღებთ ტოლობას $\int d\tau 2V(x) = \int dx\sqrt{2V(x)}$, (აქ პოტენციალის ნიშნის ცვლილება დროის გარდაქმნამ გამოიწვია) საიდანაც

$$\frac{dx}{d\tau} = \sqrt{2V(x)} \tag{15}$$

(15) განტოლება წარმოადგენს მოძრაობის განტოლებას. მოცემული განტოლების ამონახსნით, ტრაექტორიით აღიწერება ტუნელური გადასვლის ამპლიტუდა.

კონკრეტული პოტენციალის 6 გათვალისწინებით ვიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას.

$$x'(\tau) - x^2(\tau) + 1 = 0 \tag{16}$$

მოცემული დიფ განტოლების ამონახსნს კი აქვს სახე
$x(\tau) = \frac{1-exp(2(\tau_0+\tau))}{exp(2(\tau_0+\tau))+1} = -tanh(\tau_0 + \tau)$

სიმეტრიულ პოტენციურ ორმოს თუ განვაზოგადებთ $V(x) = \frac{\lambda}{2}(x^2-a^2)^2$, ამონახსნი დამატებით დამოკიდებული იქნება ახალ პარამეტრებზე λ, a. დიფერენციალური განტოლება მიიღებს სახეს. $x'(\tau) - \sqrt{\lambda}x^2 + \sqrt{\lambda}a^2 = 0$. ხოლო ამონახსნი იქნება $x(\tau) = \pm a \cdot tanh(a\sqrt{\lambda}\tau - a\tau_0)$. სადაც $(\pm)$ შესაბამისად ინსტატტონი და ანტიინსტანტონია. ვხედავთ რომ როდესაც პარამეტრები ხდებიან 1-ის ტოლი, ვუბრუნდებით ძველ ამონახსნს. შემდეგ ეტაპზე მოცემული ტრაექტორიისთვის ვითვლით ქმედებას.

$$S_E = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(\tau)d\tau = \frac{\omega^3}{12\lambda} \tag{17}$$

სადაც $\omega^2 = V(x)''(\pm a)$

3.2 ასიმეტრიული პოტენციალური ორმო

კვანტურ თეორიაში ტუნელირების ალბათობა ერთეულ დროში და მოცულობაში ჩაიწერება [2]

$$\Gamma/V = Aexp(-B/\hbar)[1 + O(\hbar)] \tag{18}$$

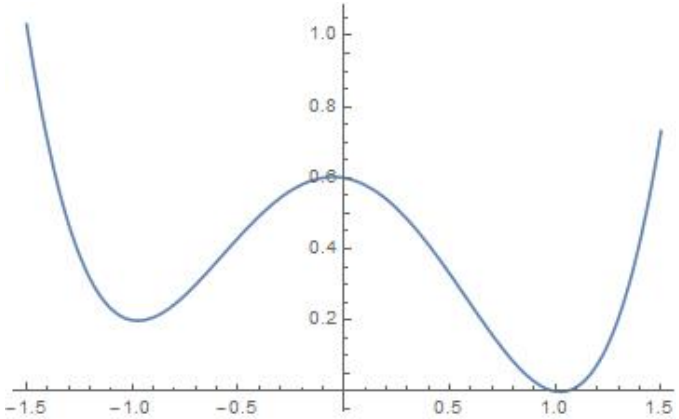
A და B კოეფიციენტები დამოკიდებულია იმ პოტენციალის ფორმაზე, რომელშიც ნაწილაკი მოძრაობს. A კოეფიციენტის დათვლა დაკავშირებულია დამატებით სირთულეებთან და დათვლილია ჯ.ბაკე, გ.ლავრელაშვილი- მიერ [5]. პირველ ეტაპზე ყურადღებას გავამახვილებ B კოეფიციენტზე, რომელიც [6] კოულმანი, დე ლუჩა-ს მიხედვით არის

$$B = S_E - S_f. \tag{19}$$

კლასიკურ თეორიაში ქმედების დათვლისას მნიშვნელობა არ აქვს ენერგიის ათვლის წერტილს. აქ კი საჭიროა სისტემის ყალბი ვაკუუმი დავსვათ ნულოვან ენერგიაზე. სწორედ ამიტომ ვაკლებთ ქმედებას S_f-ს, რომელიც მოცემული პოტენციალისთვის ყალბ და ნამდვილ ვაკუუმებს შორის ენერგეტიკულ სხვაობას უდრის. ევკლიდური ქმედებისთვის კი

$$S_E = \int dt \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + V\right] \tag{20}$$

განვიხილავთ ერთეული მასის მქონე ნაწილაკს, მოძრავს $V(x)$ პოტენციალში. პოტენციალი შედგება ნამდვილი და ყალბი ვაკუუმისგან. შედარებით მაღალ ენერგეტიკულ მინიმუმს ვუწოდებთ ყალბ ვაკუუმს. მიუხედავად იმისა, რომ



სურ 4:

მას გააჩნია ლოკალური მინიმუმი ($x = x_f$ წერტილში) სისტემის წონასწორული მდგომარეობა გლობალურ მინიმუმშია (ჭეშმარიტი ვაკუმი) $x = x_{tr}$ სისტემის ლოკალური მაქსიმუმი კი $x = x_{top}$ წერტილშია. მაგალითისათვის სურ. (4) გამოსახულია პოტენციალი

$$V(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^2 - \mu(x - 1) \ . \tag{21}$$

პარამეტრი $\mu = 0.1$ და ასიმეტრიულობის კოეფიციენტია. ამ შემთხვევაში$x_f \approx -0.973994353231278$, $x_{tr} \approx 1.02412030021505$, და $x_{top} \approx -0.0501259469837726$. ს.კოულმენის თანახმად [1, 3] ქვანტური ტუნელირება აღიწერება ბაუნსით, $x_b(\tau)$, - მოძრაობის კლასიკური განტოლებების ამოხსნით რომელიც აკმაყოფილებს გარკვეულ სასაზღვრო პირობებს.

$$x_b(0) = x_0, x_b'(0) = 0, x_b(\infty) = x_f \ . \tag{22}$$

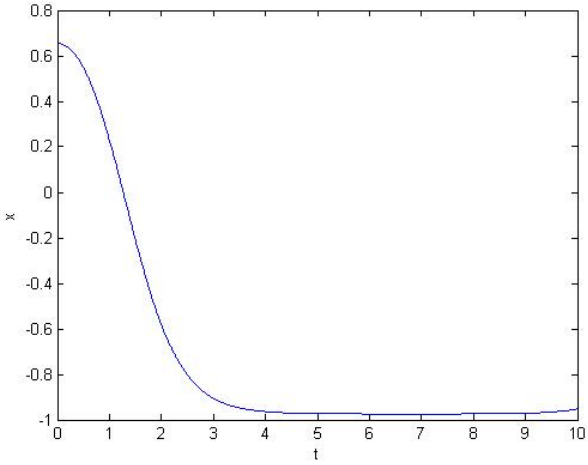
ვწერთ ნიუტონის განტოლებას ევკლიდურ წარმოდგენაში ($t \to -i\tau$)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \tag{23}$$

პოტენციალის გაწარმოებით მივიღებთ შემდეგ დიფ განტოლებას.

$$x'' - 2x^3 + 2x + \mu = 0 \tag{24}$$

(24) განტოლებას ვხსნით რიცხვითი მეთოდით. საწყის პირობად ვიღებთ $x'(0) = 0$ ნაწილაკი უსაწყისო სიჩქარით იწყებს მოძრაობას. საწყისი კოორდინატად ვიღებთ იმ წერტილს მაღალ ბურცობზე სურ (1) რომლიდან გამოსვლის შემთხვევაშიც ნაწილაკი გაჩერდება მცირე ბურცობზე. $x(\tau)$ გრაფიკს ვიღებთ შემდეგნაირს სურ (5).



სურ 5:

გრაფიკის კუდის გეომეტრიიდან გამომდინარე შეგვიძლია ვისაუბროთ ამ ნაწილის ანალიზურ ამოხსნაზე. ამისთვის ვწერთ

$$x(\tau) = \bar{x} + \delta x(\tau) \tag{25}$$

სადაც $\bar{x}$ არის ნაწილაკის კოორდინატი $\tau\star$ მომენტში ხოლო $\delta x(\tau)$ მცირე ფუნქცია. (25) ფორმულის (24) ფორმულაში შეტანით მივიღებთ.

$$\delta x(\tau)'' - 2(\bar{x} + \delta x(\tau))^3 + 2\bar{x} + 2\delta x(\tau) + \mu = 0 \tag{26}$$

რადგან $\delta x(\tau)$ მცირე ფუნქციაა, მის მაღალ ხარისხებს აღარ ვითვალისწინებთ და ვიღებთ განტოლებას

$$\delta x'' + \delta x(2 - 6\bar{x}^2) - 2\bar{x}^3 + 2\bar{x} + \mu = 0 \tag{27}$$

რადგან $\bar{x}$ მიდამოში ნაწილაკზე მოქმედი ძალათა ტოლქმედი ნულია. ვწერთ

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{x}} = 0 \Rightarrow -2\bar{x}^3 + 2\bar{x} + \mu = 0 \tag{28}$$

(27) განტოლება იღებს სახეს

$$\delta x'' + \delta x(2 - 6\bar{x}^2) = 0 \tag{29}$$

(29) განტოლების ამონახსნს ვეძებთ ექსპონენციალური სახით
$\delta x = C\exp(\lambda\tau)$; $\quad \delta x'' = \lambda^2 C\exp(\lambda\tau)$

$$C\exp(\lambda\tau)(\lambda^2 + 2 - 6\bar{x}^2) = 0 \tag{30}$$

$\lambda^2 - 6\bar{x}^2 + 2 = 0$; $\lambda^2 = 6\bar{x} - 2$; $\lambda = \pm\sqrt{6\bar{x}^2 - 2}$ ზოგად ამონახსნს ექნება სახე

$$\delta x = C_1 \exp(\sqrt{6\bar{x}^2 - 2}\tau) + C_2 \exp(-\sqrt{6\bar{x}^2 - 2}\tau) \tag{31}$$

ვამბობთ რომ $C_1 = 0$ რადგან რიცხვითი ამონახსნის გრაფიკი გვიჩვენებს ექსპონენციალურ კლებას (30) განტოლება იღებს სახეს

$$\delta x = C_2 \exp -\sqrt{6\bar{x}^2 - 2}\tau \tag{32}$$

C_2 კოეფიციენტს ვპოულობთ რიცხვითი ამონახსნის დახმარებით. კერძოდ, ვეძებ ფუნქციის მინიმალურ მნიშვნელობას მონაცემებში და რა დროს იღებს ფუნქცია ამ მნიშვნელობას ($\tau\star$). ამ შემთხვევაში $\delta x(\tau\star) = -0.98$ $\tau\star = 7.79$ $\bar{x}$ - უნდა შევარჩიოთ $\delta x(\tau\star)$-ის ახლო მიდამოდან. ამ შემთხვევაში $\bar{x} = -0.973994353231278$ სიდიდეების შეტანით გამოსახულებაში (32) მივიღებთ $C_2 \approx -4.3$ ხოლო

$$\delta x(\tau) = -4.3 \exp(-1.9\tau) \tag{33}$$

საბოლოოდ $x(\tau)$ ტრაექტორიის განტოლებას ექნება სახე

$$x(\tau) = \begin{cases} X_{num}(\tau) & \tau < \tau\star \\ \bar{x} + \delta x(\tau) & \tau \geq \tau\star \end{cases} \tag{34}$$

სადაც $\bar{x} + \delta x(\tau) = -0.973994353231278 - 4.3 \exp(-1.9\tau)$

შემდეგი ნაბიჯი გასვლის ამპლიტუდის დასათვლელად ქმედების დათვლაა. ამპლიტუდისთვის გვაქვს

$$\Gamma = Aexp(-S) \tag{35}$$

სადაც S არის ევკლიდური ქმედება

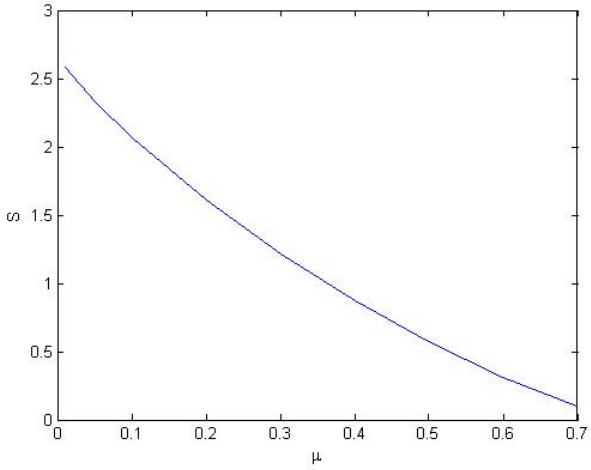
$$S = \int dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V \right] \tag{36}$$

და დავითვლით $\bar{x}(\tau)$ ტრაექტორიის გასწვრივ. $S = S_1 + S_2$ S_1 არის რიცხვითი ამონახსნის გასწვრის აღებული ინტეგრალი $\tau*$ დროის მონაკვეთამდე, ხოლო S_2 არის ინტეგრალი $x(\tau)$ -ს ანალიზური სახიდან $[\tau*, \infty]$ საზღვრებში ასევე S ქმედების მნიშვნელობა $\tau*$ -ის არჩევაზე არ უნდა იყოს დამოკიდებული. გამოთვლების შედეგად ვიღებთ $S_1 = 2.0636$, ხოლო$S_2 = 0.012$ შესაბამისად სრული ქმედებისთვის გვექნება $S \approx 2$

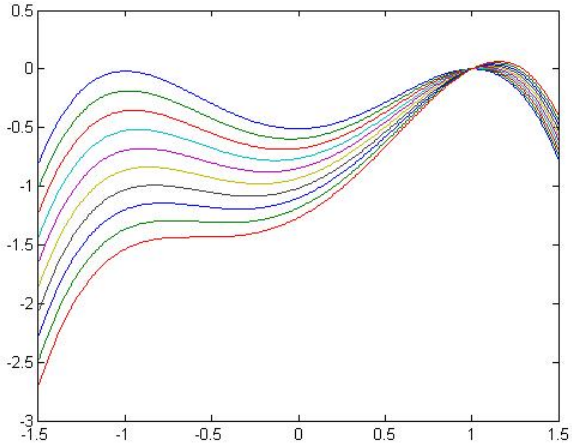
ქმედების შესაბამისი მნიშვნელობის ჩასმით (35) მიიღებს სახეს

$$\Gamma = Aexp(-2) = 0.04A \tag{37}$$

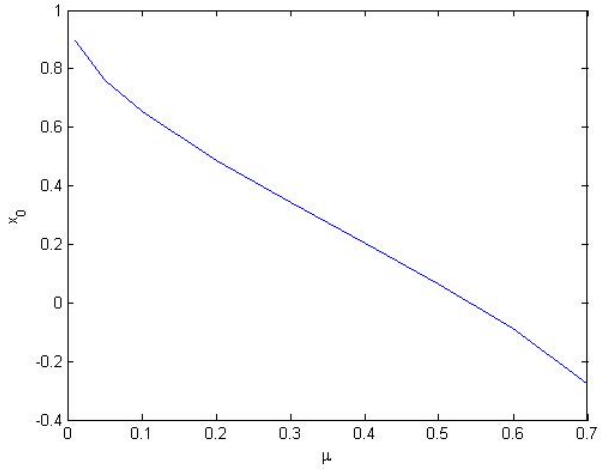
შემდეგ ეტაპზე ასიმეტრიულობის კოეფიციენტი μ აღარ არის უცვლელი. სიდიდეს ვცვლით 0.01 დან 0.8 მდე. ეს ის ინტერვალია, რომელშიც პოტენციალის ფორმა მეტნაკლებად ნარჩუნდება და ისევ სამი გადაღუნვის წერტილი გააჩნია სურ (7). μ-ს ყოველი მნიშვნელობისთვის ვხსნით დიფ განტოლებას ვპოულობთ შესაბამის x_0 წერტილებს სურ (8) და ვითვლით შესაბამის ქმედებებს. საბოლოოდ ვაგებთ ქმედების ასიმეტრიულობაზე დამოკიდებულებას სურ (6).


3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
s
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
μ

სურ 6:


0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

სურ 7:



სურ 8:

4 დასკვნა

შევისწავლეთ ტუნელურ გადასვლები ევკლიდური მეთოდებით. შევისწავლეთ მეთოდი, ალტერნატიული ხერხები და ჩავწერეთ განტოლებები ევკლიდურ სივრცე-დროში. განვიხილეთ სიმეტრიული და ასიმეტრიული პოტენციალები. დავწერეთ ანალიზური ამოხსნები სიმეტრიული ორმოს შემთხვევაში. ამოვხსენით მოძრაობის განტოლება ასიმეტრიული ორმოსთვის რიცხვითი მეთოდით. ამონახსნის თვისობრიობაზე დაყრდნობით ბოუნსის ნაწილი ამოვხსენით ანალიზურად და მივაბით რიცხვით ამონახსნს. საბოლოოდ გამოვიკვლიეთ ქმედების ასიმეტრიულობის კოეფიციენტზე დამოკიდებულება.

მადლობას ვუხდი შოთა რუსთაველის ეროვნულ სამეცნიერო ფონდს FR/143/6-350/14 გრანტის ფარგლებში ფინანსური მხარდაჭერისთვის

წყარო

[1] S. R. Coleman,
``The Fate of the False Vacuum. 1. Semiclassical Theory,''
Phys. Rev. D **15**, (1977) 2929 ;
[Erratum-ibid. D **16**, (1977) 1248].

[2] S. R. Coleman, Curtis G. Callan, jr.
''The Fate of False Vacuum 2.First Quantum Corrections,"
Phys. Rev. D **16** (1977) 1762.

[3] S. R. Coleman,
``The Uses Of Instantons,''
Subnucl. Ser. **15**, 805 (1979).

[4] L. D. Landau, E. M. Lifshitz,
''Quantum Mechanics, non-relativistic theory''
third edition 1977.

[5] J.Baacke, G.Lavrelashili,
''One-loop corrections to the metastable decay''
Phys. Rev. D **69** (2004) 025009-3.

[6] S. Coleman, F. De Luccia,
''Gravitational effects on and of vacuum decay''
Phys. Rev. D **21** (1980) 3306.

[7] A.I. Vainshtein, Valentin I. Zakharov, V.A. Novikov, Mikhail A. Shifman
''ABC's of Instantons''
Usp.Fiz.Nauk 136 (1982) 553-591 .