

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მარგარიტა თუთბერიძე

უსასრულობაში ქრობადი სისქის პრიზმული გარსის  
ცილინდრული დეფორმაციის ამოცანების გამოკვლევა

**Problem of cylindrical deformation of prismatic shell with the  
thickness vanishing at infinity**

გამოყენებითი მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია გამოყენებითი მათემატიკის მაგისტრის  
აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ნატალია ჩინჩალაძე  
ფიზიკა მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი,  
ასოცირებული პროფესორი

თბილისი 2016

## სარჩევი

ანოტაცია .....	3
შესავალი .....	7
თავი 1 .....	10
§1.1. დამხმარე მასალა .....	10
თავი 2 .....	17
§2.1. უსასრულობაში ქროზადი სისქის პრიზმული გარსის ცილინდრული დეფორმაციის ამოცანების გამოკვლევა .....	18
§2.2. ცილინდრული ღუნვის ამოცანა .....	22
§2.3. ცილინდრული რხევის ამოცანა .....	25
დასკვნა .....	32
ციტირებული ლიტერატურა .....	33

## ანოტაცია

მეოცე საუკუნის 50-იან წლებში დასაბამი მიეცა წამახვილებული პრიზმული გარსების, კერძოდ, ფირფიტების კვლევას, სახელდობრ, 1955 წელს ი. ვეკუამ [27-30] წამოჭრა დრეკადი წამახვილებული ფირფიტების შესწავლის საკითხი, როცა ფირფიტის სისქე მთელ საზღვარზე ან მის ნაწილზე ნული ხდება (მან იმ ფირფიტებს და გარსებს, რომელთა სისქე საზღვარზე ნული ხდება „წამახვილებული“ ფირფიტები და გარსები უწოდა). პრაქტიკაში ასეთი ფირფიტები და ღეროები ხშირად გვხვდება სივრცულ კონსტრუქციებში ნაწილობრივ ჩამაგრებული ნაპირებით, როგორცაა, მაგალითად, სტადიონების სახურავები, თვითმფრინავების ფრთები, წყალქვეშა ნავების ფრთები და ა.შ., გარდა ამისა მანქანათმშენებლობაში (საჭრელი და სარანდავი ჩარხები), კოსმონავტიკაში, ტურბინებში და სხვა საინჟინრო სფეროებში (მაგალითად, კაშხლებში). წამახვილებული ფირფიტების მიერ დაკავებული არეები, თუ მათ განვიხილავთ, როგორც სამგანზომილებიანს, წარმოადგენენ სამგანზომილებიან არეებს, საზოგადოდ, არალიპშიცური საზღვრებით. ამ ამოცანას მათემატიკურად მივყავართ რიგის გადაგვარების მქონე განტოლებებისა და სისტემებისათვის სასაზღვრო ამოცანების (ელიფსური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის) და საწყის-სასაზღვრო ამოცანების (ჰიპერბოლური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის) დასმისა და ამოხსნადობის გამოკვლევის საკითხამდე [შესაბამის გამოკვლევებთან დაკავშირებით იხ. მიმოხილვები [16], [23]-სა და [33]-ში, აგრეთვე ი. ვეკუას კომენტარები [28]-ში (გვ. 86)]. ამავე პერიოდში ი. ვეკუამ შემოგვთავაზა ე.წ. პრიზმული გარსების, კერძოდ, ცვლადი სისქის ფირფიტების მათემატიკური მოდელი, რომელიც ეფუძნება სისქის ცვლადის მიმართ სამგანზომილებიანი წრფივი დრეკადობის თეორიის გადაადგილების ვექტორის, ძაბვის და დეფორმაციის ტენზორების ფურიე-ლეჟანდრის ორთოგონალურ მწკრივებად გაშლას. გაშლის პირველი  $N+1$  წევრის შენარჩუნებით მან შემოიღო ე.წ.  $N$ -ური მიახლოება და განსაზღვრა შესაბამისი ორგანზომილებიანი მოდელების იერარქია. ყოველი ეს მიახლოება  $N = 0, 1, \dots$  შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც პრიზმული გარსების დამოუკიდებელი მოდელი. 60-იან წლებში ი. ვეკუამ [29] განავითარა ანალოგიური მათემატიკური მოდელი თხელი დამრეცი გარსებისათვის. ფირფიტებსა და გარსებთან დაკავშირებული ყველა მისი შედეგი თავმოყრილია მის მონოგრაფიაში [28]. ი. ბაბუშკას, დ. გორდუზიანის, ვ. გულიაევის, ი. ხომას, თ. მეუნარგიას, გ. ჯაიანის, კ. შვაბის, თ. ვაშაყმაძის, ვ. ჟღენტის და

სხვათა შრომები (იხ. [2-4, 6-8, 13, 15-17, 23, 25] და იქ მითითებული ლიტერატურა) მიემდვნა ი. ვეკუას მოდელის შემდგომ ანალიზს.

მართკუთხა კვეთის მქონე ღეროებისათვის იერარქიული მოდელები აგებულია გ. ჯაიანის მიერ, მან ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების და გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები გაშალა ორმაგი ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივად ღეროს სიგანისა და სისქის მიმართ [19].

ნაშრომი ეხება ექსპონენციალური წამახვილების მქონე პრიზმული ფირფიტების დინამიკისა და სტატიკის ამოცანებს ცილინდრული დეფორმაციის შემთხვევაში, როცა სისქის ნახევარი მოიცემა ფორმულით

$$h = h_0 e^{-\alpha x_2},$$

სადაც,

$$h_0 = \text{const} > 0, \alpha = \text{const} \geq 0, 0 \leq x_2 < \infty; -\infty < x_1 < +\infty (x_1, x_2) \in \omega,$$

სადაც  $\omega$  ფირფიტის გეგმილია  $Ox_1x_2$  სიბრტყეზე,

$$\omega := \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, 0 < x_2 < +\infty\}.$$

დასმული ამოცანის ამონახსნები ჩაწერილია ინტეგრალური ფორმით, მოყვანილია რიცხვითი შედეგები.

## Summary

In the fifties of XX century investigations of cusped elastic prismatic shells actually takes its origin, namely, in 1955 I. Vekua raised the problem of investigation of elastic cusped prismatic shells, whose thickness on the prismatic shell entire boundary or on its part vanishes [see [27-30]]. In practice, such cusped prismatic shells, in particular, cusped plates, and cusped beams (i.e., beams whose cross-sections area vanishes at least at one end of the beam) are often encountered in spatial structures with partly fixed edges, e.g., stadium ceilings, aircraft wings, submarine wings etc., in machine-tool design, as in cutting-machines, planing-machines, in astronautics, turbines, and in many other application fields of engineering. Investigation of elastic cusped prismatic shells, considered as 3D ones, may occupy 3D domains with, in general, non-Lipschitz boundaries. The problem mathematically leads to the question of setting and solving of boundary value problems for even order equations and systems of elliptic type with the order degeneration in the static case and of initial boundary value problems for even order equations and systems of hyperbolic type with the order degeneration in the dynamical case (for corresponding investigations see the survey [16], [23], [33] and also I. Vekua's comments in [28, p.86]). At the same time I. Vekua introduced a new mathematical model for elastic prismatic shells which was based on expansions of the three-dimensional displacement vector fields and the strain and stress tensors in linear elasticity into orthogonal Fourier-Legendre series with respect to the variable plate thickness. By taking only the first  $N + 1$  terms of the expansions, he introduced the so called  $N$ -th approximation. Each of these approximations for  $N=0;1;\dots$  can be considered as an independent mathematical model of plates. In particular, the approximation for  $N = 1$  corresponds to the classical Kirchhoff plate model. In the sixties,

I. Vekua developed the analogous mathematical model for thin shallow shells [29]. All his results concerning plates and shells are collected in his monograph [28]. Works of I. Babuska, D. Gordeziani, V. Guliaev, I. Khoma, A. Khvoles, T. Meunargia, C. Schwab, T. Vashakmadze, V. Zhgenti, G. Jaiani, G. Tsikarishvili, M. and G. Avalishvili, W. Wendland, D. Natroshvili, S. Kharibegashvili, N. Chinchaladze, R. Gilbert, and others are devoted to further analysis of I. Vekua's models (rigorous estimation of the modeling error, numerical solutions, etc.) and their generalizations (see, e.g., [2-4, 6-8, 13, 15-17, 23, 25]).

The analogues system in the case of  $(N_3, N_2)$  approximation of hierarchical models for cusped beams, in general, beams with variable rectangular cross-sections are derived by G. Jaiani ([19]).

The present work is devoted to the problem of cylindrical deformation of prismatic shell with the thickness as follows.

$$h = h_0 e^{-\alpha x_2}, \quad h_0 = \text{const} > 0, \quad \alpha = \text{const} \geq 0, \quad 0 \leq x_2 < \infty; \quad -\infty < x_1 < +\infty, \quad (x_1, x_2) \in \omega,$$

Where  $\omega$  is the projection of the plate on  $Ox_1x_2$ ,

$$\omega := \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, 0 < x_2 < +\infty\}.$$

Solutions of the problems are presented by integral forms, numerical results are also give.

## შესავალი

წამახვილებული პრიზმული გარსების, კერძოდ, ფირფიტების კვლევას დასაბამი მიეცა გასული საუკუნის შუა წლებიდან, სახელდობრ, 1955 წელს ი. ვეკუამ [27-29] წამოჭრა დრეკადი წამახვილებული ფირფიტების შესწავლის საკითხი, როცა ფირფიტის სისქე მთელ საზღვარზე ან მის ნაწილზე ნული ხდება. ასეთი სხეულების მიერ დაკავებული არეები, თუ მათ განვიხილავთ, როგორც სამგანზომილებიანს, წარმოადგენენ სამგანზომილებიან არეებს, საზოგადოდ, არალიპშიცური საზღვრებით. პრაქტიკაში ასეთი ფირფიტები და ღეროები ხშირად გვხვდება სივრცულ კონსტრუქციებში ნაწილობრივ ჩამაგრებული ნაპირებით, როგორცაა, მაგალითად, სტადიონის სახურავი, თვითმფრინავის ფრთები, წყალქვეშა ნავის ფრთები და ა.შ., გარდა ამისა მანქანათმშენებლობაში (საჭრელი და სარანდავი ჩარხები), კოსმონავტიკაში, ტურბინებში და სხვა საინჟინრო სფეროებში (მაგალითად, კაშხლებში). ამ ამოცანას მათემატიკურად მიყვართ რიგის გადაგვარების მქონე განტოლებებისა და სისტემებისათვის სასაზღვრო ამოცანების (ელიფსური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის) და საწყის-სასაზღვრო ამოცანების (ჰიპერბოლური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის) დასმისა და ამოხსნადობის გამოკვლევის საკითხამდე [შესაბამის გამოკვლევებთან დაკავშირებით იხ. მიმოხილვები [16]-სა და [23]-ში, აგრეთვე ი. ვეკუას კომენტარები [28]-ში (გვ. 86)].

მეოცე საუკუნის 50-ან წლებში ი. ვეკუამ შემოგვთავაზა ე.წ. პრიზმული გარსების, კერძოდ, ცვლადი სისქის ფირფიტების მათემატიკური მოდელი, რომელიც ეფუძნება სისქის ცვლადის მიმართ სამგანზომილებიანი წრფივი დრეკადობის თეორიის გადაადგილების ვექტორის, ძაბვის და დეფორმაციის ტენზორების ფურიე-ლეჟანდრის ორთოგონალურ მწკრივებად გაშლას. გაშლის პირველი  $N+1$  წევრის შენარჩუნებით მან შემოიღო ე.წ.  $N$ -ური მიახლოება და განსაზღვრა შესაბამისი ორგანზომილებიანი მოდელების იერარქია. ყოველი ეს მიახლოება  $N=0,1,\dots$  შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც პრიზმული გარსების დამოუკიდებელი მოდელი. 60-იან წლებში ი. ვეკუამ [29] განავითარა ანალოგიური მათემატიკური მოდელი თხელი დამრეცი გარსებისათვის. ფირფიტებსა და გარსებთან დაკავშირებული ყველა მისი შედეგი თავმოყრილია მის მონოგრაფიაში [28]. ი. ბაბუშკას, დ.გორდეზიანის, ვ.გულიაევის, ი. ხომას, თ.მეუნარგიას,

კ. შვაბის, თ. ვაშაყმაძის, ვ. ჟღენტის და სხვათა შრომები (იხ. [2-4, 5, 6, 8, 11-26] და იქ მითითებული ლიტერატურა) მიემდვნა ი. ვეკუას მოდელის შემდგომ ანალიზს, სახელდობრ, მოდელირების და რიცხვითი ამონახსნის ცდომილების ზუსტ შეფასებას, მოდელების განზოგადებას არადამრეცი გარსებისათვის, იზოტროპულ შემთხვევას და სხვა. ამასთან, როგორც ეს უკვე აღნიშნული იყო, მან დასვა საკითხი ისეთი პრიზმული გარსების გამოკვლევის თაობაზე, რომელთა სისქე გარსის საზღვრის ნაწილზე ან მთელ საზღვარზე ნული ხდება. მან იმ ფირფიტებს და გარსებს, რომელთა სისქე საზღვარზე ნული ხდება „წამახვილებული“ ფირფიტები და გარსები უწოდა.

მართკუთხა კვეთის მქონე ღეროებისათვის იერარქიული მოდელები აგებულია გ. ჯაიანის მიერ, მან ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების და გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები გაშალა ორმაგი ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივად ღეროს სიგანისა და სისქის მიმართ ([19]).

ზოგიერთი ამოცანა წამახვილებული ფირფიტებისა და ღეროებისათვის, რომელთა სისქე ცვალებადია, გამოკვლეული იყო მ. მახოვერის, ა. ხვოლესის, ს. მიხლინის, გ. ჯაიანის, გ. ცისკარიშვილის, ნ. ხომასურიძის, გ. დევდარიანის, ს. უზუნოვის, ს. ნაგულესვარანის, ნ. ჩინჩალაძის და ს. ხარიბეგაშვილის შრომებში (იხ. [25] და მიმოხილვები [16]-ში, [19]-ში, [23]-ში და იქვე მითითებული ლიტერატურა). ამ ავტორების ნაშრომები ძირითადად ემდგნება ხარისხოვანი ცვლადი სისქის მქონე ფირფიტების და ღეროების შესწავლას ბერნულ-ეილერის ღეროების, კირხჰოფის ფირფიტების და ი. ვეკუას იერარქიული მოდელების ნულოვანი და პირველი მიახლოებების ბაზაზე.

[23]-ში ლიპშიცის არეების შემთხვევაში გ. ჯაიანმა, ს. ხარიბეგაშვილმა, დ. ნატროშვილმა და ვ. ვენდლანდმა ააგეს ორგანზომილებიანი იერარქიული მოდელები დრეკადი წამახვილებული პრიზმული გარსებისათვის. ვარიაციული მეთოდების გამოყენებით სათანადო წონიან ფუნქციონალურ სივრცეებში დამტკიცებულია არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები შესაბამისი ორგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანებისათვის. ამ ორგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების საშუალებით აგებულია სამგანზომილებიანი არისათვის მიახლოებითი ამონახსნების მიმდევრობა. ეს მიმდევრობა სობოლევის  $H^1$  სივრცეში კრებადია ამოსავალი სამგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნისაკენ. ცხადი სახით არის ამოწერილი ორგანზომილებიანი იერარქიული მოდელების შესაბამისი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები ზოგადი ორთოგონალური სისტემისათვის და, კერძოდ,



ლეჟანდრის პოლინომებისათვის.

შემთხვევებს, როცა პრიზმული გარსის სისქე საზღვარზე ნულდება მიემდვნა ე. მახოვერის, ს. მიხლინის, ა. ხვოლესის, გ. ჯაიანის, დ. ნატროშვილის, ს. ხარიბეგაშვილის, ვ. ვენდლანდის [17], გ. ჯაიანის [19], ნ. ჩინჩალაძის [10], ნ. ჩინჩალაძის, გ. ჯაიანის [25] (იხ. აგრეთვე ნ. ჩინჩალაძე, რ. ჯილბერტი, გ. ჯაიანი, ს. ხარიბეგაშვილი, დ. ნატროშვილი [8]) და სხვათა შრომები. ნ. ჩინჩალაძის, გ. ჯაიანის, ბ. მაისტრენკოს და პ. პოდო-გუიდულის [9] მიერ იერარქიული მოდელების ფარგლებში შესწავლილი იყო წამახვილებულ პრიზმულ სხეულებში შინაგანი შეყურსული ძალების წარმოქმნის საკითხი. შემდგომში ი. ვეკუას მეთოდის განზოგადებით განხილული იყო დრეკადი ღეროების ერთგანზომილებიანი იერარქიული მოდელების აგების და გამოკვლევის საკითხები გ. ჯაიანის, ს. ხარიბეგაშვილი, დ. ნატროშვილი, ვენდლანდის [17] და მ. და გ. ავალიშვილების [2-4] (იხ. აგრეთვე ნ. ჩინჩალაძე, რ. ჯილბერტი, გ. ჯაიანი, ს. ხარიბეგაშვილი, დ. ნატროშვილი [7]) მიერ. წამახვილებულ სტანდარტულ და პრიზმულ გარსებთან, ფირფიტებთან და ღეროებთან დაკავშირებით მიღებული შედეგები დაწვრილებით არის მიმოხილული გ. ჯაიანის [13] მონოგრაფიაში.

ნაშრომი შედგება შესავლის, ორი თავისა და მითითებული ლიტერატურისაგან.

პირველი თავი დამხმარე ხასიათისაა. მოყვანილია ვეკუას იერარქიული მოდელების ძირითადი დამოკიდებულებები.

მეორე თავი ეხება უსასრულობაში ქრობადი სისქის პრიზმული გარსის ცილინდრული დეფორმაციის ამოცანების კვლევას.

მეორე თავის პირველ პარაგრაფში გამოყვანილია ძირითადი დამოკიდებულებები  $N=0$  მიახლოებაში მოცემული სისქის შემთხვევაში. Matlab-ის გარემოში. აგებულია ფირფიტის პროფილები, გეგმილი და ქვედა და ზედა ზედაპირები.

მეორე თავის მეორე პარაგრაფი ეხება ცილინდრული ღუნვის ამოცანის შესწავლას. დასმული ამოცანის ამონახსნი წარმოდგენილია ინტეგრალური ფორმით, მოყვანილია ამონახსნის გრაფიკული წარმოდგენები.

მეორე თავის მესამე პარაგრაფში განხილულია ჰარმონიული რხევის ამოცანა. დასმული ამოცანის ამონახსნის სახე დამოკიდებულია რხევის სიხშირეზე. ამონახსნები ჩაწერილია ინტეგრალური ფორმით. მოყვანილია ამონახსნის გრაფიკული წარმოდგენები Matlab-ის გარემოში.

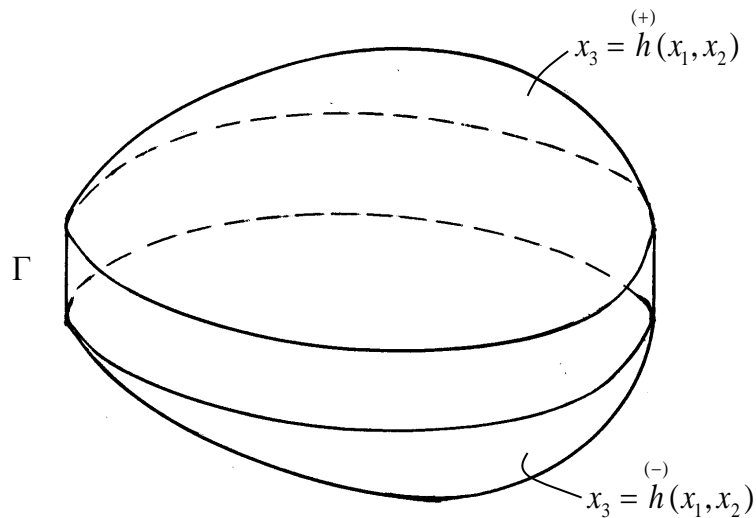
## თავი 1

### §1.1. დამხმარე მასალა

სხეულს, რომელიც ზემოდან და ქვემოდან შემოსაზღვრულია  $z = h^{(+)}(x_1, x_2)$  და  $z = h^{(-)}(x_1, x_2)$  ზედაპირებით, ხოლო გვერდიდან  $-\Gamma$  ცილინდრული ზედაპირით (იხ.ნახ. 1.1), რომლის მსახველი ვერტიკალური  $Ox_3$  ღერძის პარალელურია, ეწოდება *პრიზმული გარსი* (იხ. მაგ. [1]). სიმეტრიულ შემთხვევაში, ე.ი. როცა  $h^{(-)}(x_1, x_2) = -h^{(+)}(x_1, x_2)$  პრიზმული გარსი წარმოადგენს ცვლადი სისქის ფირფიტას.

$$2h(x_1, x_2) = h^{(+)}(x_1, x_2) - h^{(-)}(x_1, x_2) \geq 0$$

სიდიდეს ეწოდება პრიზმული გარსის სისქე.



ნახ. 1.1

პრიზმული გარსის გეგმილი  $Ox_1x_2$  სიბრტყეზე აღვნიშნოთ  $\omega$ -თი, მის საზღვარს გარსის საზღვარი ეწოდება.

ჯერ კიდევ კოშიმ გამოიყენა ფირფიტების შესწავლის დროს გადაადგილების, დეფორმაციების და ძაბვების ხარისხიდან მწკრივად გაშლის მეთოდი. ეს მიდგომა აქვთ სხვა ავტორებსაც. ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც ლეჟანდრის პოლინომების მიმართ მწკრივად გაშლას ეყრდნობა და რომელზეც ჩვენ შევჩერდებით, ი.ვეკუას ეკუთვნის.

დრეკადობის წრფივი სამგანზომილებიანი თეორიის ძირითადი დამოკიდებულებები შედგება:

**მოდრაობის განტოლებებისაგან**

$$X_{ij,j} + \Phi_i = \rho u_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad x \in \Omega \subset R^3, t > t_0, i = 1, 2, 3, \quad (1.1.1)$$

სადაც  $X_{ij}$  წარმოადგენს ძაბვის ტენზორის კომპონენტებს,  $\Phi_i$ -მოცულობის ძალის კომპონენტებს;

**ჰუკის განზოგადებული კანონისაგან**

$$X_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.1.2)$$

სადაც  $\lambda$  და  $\mu$  ლამეს მუდმივებია,  $e_{ij}$ -დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტები,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{-კრონეკერის სიმბოლოა,}$$

$$\theta = e_{ii},$$

ძაბვის ტენზორი სიმეტრიულია  $X_{ij} = X_{ji}$ ;

**კინემატიკის დამოკიდებულებებისაგან**

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.1.3)$$

სადაც  $u_i$  არის გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები.

თუ რაიმე ინდექსი ერთწევრში მხოლოდ ორჯერ გვხვდება, ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ხდება აჯამვა მის მიმართ ინდექსის ცვლილებს სიმრავლეზე (შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ ლათინური არამთავრული ინდექსები იღებენ მნიშვნელობებს 1,2,3, ხოლო ბერძნული კი 1,2). იმ შემთხვევაში, როცა ასეთ ფაქტს აქვს ადგილი, მაგრამ აჯამვა არ უნდა მოხდეს, ერთ-ერთ ინდექსს ქვემოდან ან ზემოდან

გავუსვავთ ხაზს. მაგალითად,  $a_{ii} = \sum_{i=1}^3 a_{ii}$ ,  $a_i^i = \sum_{i=1}^3 a_i^i$ , მაგრამ  $a_{ii} = a_{ii}$  აღნიშნავს სამ

ელემენტს:  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  -ს იმისდა მიხედვით, თუ რა მნიშვნელობას იღებს  $i$ .

დრეკადი წონასწორობის განსაზღვრა გულისხმობს სხეულის ყოველ წერტილში გადაადგილების ვექტორის, ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორის მნიშვნელობების პოვნას.

ცნობილია, რომ ნებისმიერი  $f(x) \in C^2([-1, +1])$  ფუნქცია შეიძლება გაიშალოს მწკრივად ლეჟანდრის პოლინომის მიმართ:

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(r + \frac{1}{2}\right) f_r P_r(x)$$

სადაც

$$P_r(x) = \frac{1}{2^r r!} \frac{d^r (x^2 - 1)^r}{dx^r}$$

ლეჟანდრის პოლინომია, ხოლო

$$f_r = \int_{-1}^1 f(x) P_r(x) dx$$

და მას ეწოდება  $f$  -ის  $r$  -ური მომენტი ლეჟანდრის პოლინომების მიმართ.

როცა  $[-1,1]$ -ის ნაცვლად გვაქვს  $\left[ \begin{matrix} (-) (+) \\ h, h \end{matrix} \right]$  და  $f(x_1, x_2, x_3)$ -ს ფიქსირებული  $(x_1, x_2)$ -

სთვის  $x_3$  -ის მიმართ აქვს მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებულები, ე.ი  $f \in C_{x_3}^2 \left( \left[ \begin{matrix} (-) (+) \\ h, h \end{matrix} \right] \right)$ ,

მაშინ

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{r=0}^{\infty} a \left(r + \frac{1}{2}\right) f_r(x_1, x_2) P_r(ax_3 - b),$$

სადაც მწკრივი თანაბრად კრებადია  $\left[ \begin{matrix} (-) (+) \\ h, h \end{matrix} \right]$  სეგმენტზე და

$$a = \frac{1}{h}, \quad b = \frac{\begin{matrix} (-) (+) \\ h+h \end{matrix}}{2h}, \tag{1.1.4}$$

$$f_r(x_1, x_2) = \int_{\begin{matrix} (+) \\ h \\ (-) \\ h \end{matrix}} f(x_1, x_2, x_3) P_r(ax_3 - b) dx_3 .$$

თუ ვექტორი  $(u_i, X_{ij}, e_{ij}) \in C_{x_3}^2 \left( \left[ \begin{matrix} (-) (+) \\ h, h \end{matrix} \right] \right)$ , მაშინ ის  $\left[ \begin{matrix} (-) (+) \\ h, h \end{matrix} \right]$  სეგმენტზე შეიძლება

გავშალოთ თანაბრად კრებად მწკრივად

$$(u_i, X_{ij}, e_{ij}) = \sum_{r=0}^{\infty} a \left( r + \frac{1}{2} \right) (u_{ir}, X_{ijr}, e_{ijr}) P_r(ax_3 - b).$$

ვაიერშტრასის\*) თეორემის თანახმად  $x_3$ -ის ნებისმიერ უწყვეტ ფუნქციას შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ  $x_3$ -ის მიმართ პოლინომებით. ამიტომ  $N$ -ის შერჩევით  $(u_i, X_{ij}, e_{ij})$ -ს შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ  $x_3$ -ის მიმართ ლეჟანდრის პოლინომების შემდეგი ჯამით:

$$(u_i, X_{ij}, e_{ij}) \cong \sum_{r=0}^N a \left( r + \frac{1}{2} \right) (u_{ir}, X_{ijr}, e_{ijr}) P_r(ax_3 - b). \quad (1.1.5)$$

იერარქიული მოდელების აგების ი.ვეკუას მეთოდი მდგომარეობს სამგანზომილებიანი ამოცანის ორ განზომილებიანზე გადასვლაში.

თუ (1.1.2) დამოკიდებულების ორივე მხარეს გავამრავლებთ  $P_r(ax_3 - b)$ -ზე და ვაინტეგრებთ  $h^{(-)}$ -დან  $h^{(+)}$ -მდე  $x_3$ -ის მიმართ, მაშინ ნაწილობითი ინტეგრებისა და პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალის გაწარმოების წესის

$$\frac{d}{d\xi} \int_{c(\xi)}^{d(\xi)} f(\xi, \eta) d\eta = \int_{c(\xi)}^{d(\xi)} \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta + f(\xi, d(\xi)) \frac{\partial d}{d\xi} - f(\xi, c(\xi)) \frac{\partial c}{d\xi}$$

გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$X_{ijr}(x_1, x_2) = \lambda \theta_r(x_1, x_2) \delta_{ij} + 2\mu e_{ijr}(x_1, x_2), \quad r=0,1,\dots, \quad (1.1.6)$$

რაც წარმოადგენს ჰუკის კანონს, გადაწერილს მომენტებისთვის.

ანალოგიურად შეიძლება მივიღოთ მოძრაობის შემდეგი განტოლებები მომენტებისთვის (იხ.[30, 31, 1])

$$X_{ijr,\alpha} + \sum_{s=0}^r a_{is} X_{ijs} + X_j^r = \rho \frac{\partial^2 u_{jr}}{\partial t^2}, \quad r=0,1,\dots, \quad j=1,2,3, \quad (1.1.7)$$

სადაც

$$\begin{aligned}
a_{\alpha s}^r &= (2s+1) \frac{h_{,\alpha}^{(+)} - (-1)^{r+s} h_{,\alpha}^{(-)}}{2h}, s \neq r; \\
a_{\alpha r}^r &= r \frac{h_{,\alpha}^{(+)} - h_{,\alpha}^{(-)}}{2h}, \\
a_{3s}^r &= -(2s+1) \frac{1 - (-1)^{r+s}}{2h}, \\
X_j^r &= X_{3j}^{(+)} - X_{\alpha j}^{(+)} h_{\alpha}^{(+)} + (-1)^r \left[ -X_{3j}^{(-)} - X_{\alpha j}^{(-)} h_{\alpha}^{(-)} \right] + \Phi_{jr} = \\
&= Q_{nj}^{(+)} \sqrt{1 + \left( h_{,1}^{(+)} \right)^2 + \left( h_{,2}^{(+)} \right)^2} + (-1)^r Q_{nj}^{(-)} \sqrt{1 + \left( h_{,1}^{(-)} \right)^2 + \left( h_{,2}^{(-)} \right)^2} + \Phi_{jr},
\end{aligned}$$

სადაც  $Q_{nj}^{(+)}, Q_{nj}^{(-)}$  შესაბამისად ზედა და ქვედა პირით ზედაპირებზე მოქმედი ზედაპირული

ძალებია.  $n$  და  $n$  შესაბამისად ზედა და ქვედა პირითი ზედაპირების გარე (გარსის მიმართ) ნორმალებია.  $\Phi_{jr}$  მოცულობითი ძალის კომპონენტების  $r$ -ური მომენტებია.

დეფორმაციის ტენზორის  $r$ -ური მომენტები ასე ჩაიწერება:

$$e_{ijr} = \frac{1}{2} \sum_{s=r}^{\infty} b_{is}^r u_{js} + \frac{1}{2} \sum_{s=r}^{\infty} b_{is}^r u_{is} + E_{ij}^r, \quad r=0,1,2,\dots, i,j=1,2,3 \quad (1.1.8)$$

სადაც

$$\begin{aligned}
E_{ij}^{(r)} &= \frac{1}{2} (u_{ir,j} + u_{jr,i}), \quad b_{\alpha r}^r = -(r+1) \frac{h_{,\alpha}^{(+)} - h_{,\alpha}^{(-)}}{2h}, \\
b_{3r}^r &= 0, \quad b_{js}^r = \begin{cases} 0, & s < r, \\ r & s = r, \\ -a_{js}, & s > r. \end{cases}
\end{aligned}$$

(1.1.8) ჩავსვათ (1.1.6)-ში, ხოლო მიღებული -(1.1.7)-ში. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\mu \Delta u_{jr} + (\lambda + \mu) \frac{\partial E}{\partial x_j} + M_j^r(u_{ir}) + X_j^r = \rho \frac{\partial^2 u_{jr}}{\partial t^2}, \quad r=0,1,\dots, i=1,2,3, \quad (1.1.9)$$

$$E^r = E_{ii}^r.$$

$M_j^r$  წრფივი ოპერატორები დამოკიდებულია ფირფიტის სისქეზე და შეიცავენ მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებულებს.

(1.1.9) ფაქტობრივად წარმოადგენს ლამეს განტოლებებს, ჩაწერილს მომენტებისათვის.

ვიგულისხმობთ, რომ

$$u_{ir} = 0, \text{ როცა } r > N \quad (1.1.10)$$

და (1.1.6) სისტემაში დავტოვოთ მხოლოდ პირველი  $N+1$  განტოლება. მიღებულ განტოლებათა სისტემაში  $u_{jr}$ , საზოგადოდ, უკვე არ წარმოადგენს  $u_j$ -ს  $r$ -ურ მომენტს, განსაზღვრულს (1.1.4) ტოლობით. მიღებული სისტემა შეესაბამება  $N$ -ურ მიახლოებას.

თუ გარსის გვერდით ზედაპირზე მოცემულია ან  $X_{ni} = f_i$  ძაბვები ან  $u_{ni} = f_i$  გადაადგილებები, მაშინ, მათი  $P_r(ax_3 - b)$ -ზე გამრავლებითა და  $h^{(-)}$ -დან  $h^{(+)}$ -მდე ინტეგრებით ადვილად ვიპოვით შესაბამის მომენტებს:

$$X_{nir} = f_{ir}, \quad i=1,2,3, \quad r=0,1,\dots,N, \quad (1.1.11)$$

$$u_{ir} = f_r, \quad i=1,2,3, \quad r=0,1,\dots,N, \quad (1.1.12)$$

სადაც  $n$  გვერდითი ზედაპირის გარე ნორმალია.

დინამიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები შემდეგი სახით დაისმის: ვიპოვოთ  $u_{jr} \in C^2(\omega)$ ,  $r = 0, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, 3$ , რომელიც აკმაყოფილებს (1.1.9) განტოლებას  $\omega$ -ში, დროის ნებისმიერ  $t \geq t_0$  მომენტში (1.1.11) ან (1.1.12) პირობებს გარსის საზღვარზე და

$$u_{rj}|_{t=t_0} = \varphi_{rj}(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u_{rj}}{\partial t}|_{t=t_0} = \psi_{rj}(x_1, x_2), \\ (x_1, x_2) \in \omega, \quad r = \overline{0, N}, \quad j = 1, 2, 3$$

საწყის პირობებს.

ამ გზით მიღებული სისტემის ღირსშესანიშნავი თვისება იმაში მდგომარეობს, რომ იგი განტოლებათა ორ ჯგუფად იყოფა. ერთი ჯგუფის მთავარი წევრები ემთხვევა ბრტყელი დრეკადობის თეორიის ძირითად განტოლებათა სისტემის ოპერატორს, ხოლო მეორე ჯგუფის მთავარი წევრები - ლაპლასის ოპერატორს. ეს იმის საშუალებას იძლევა, რომ პრიზმული გარსების გათვლისათვის გამოვიყენოთ დრეკადობის ბრტყელი თეორიისა და ლაპლასის ოპერატორისათვის არსებული მათემატიკური აპარატი. ცხადია, ამონახსნის სიზუსტე იზრდება  $N$ -ის ზრდასთან ერთად. თუმცა ამასთან ერთად იზრდება სისტემაში შემავალ განტოლებათა რიცხვი, რაც ართულებს მის ამოხსნას, მაგრამ პრაქტიკული მოსაზრებიდან გამომდინარე შეიძლება დაგვკმაყოფილდეთ ნულოვანი ( $N=0$ ) და პირველი ( $N=1$ ) მიახლოებით.

დამტკიცებულია ძირითადი ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობა და გარკვეულ პირობებში არსებობს, [5, 6, 11, 12, 24, 26, 28, 30, 31, 32], როცა  $2h > 0$ . წამახვილებული გარსები

განხილულია [33, 14, 16, 18-22]-ში. ივეკუას ზემოაღწერილი რედუქციის მეთოდი განზოგადებულია ანიზოტროპული ფირფიტებისა [26] და გეომეტრიულად და ფიზიკურად არაწრფივი არადამრეცი გარსებისათვის [24].

**შენიშვნა 1.1.** N-ური მიახლოების სასაზღვრო პირობებში მოცემული გვაქვს ძაბვის ტენზორის ან გადაადგილების ვექტორის მომენტები. საძიებელი სიდიდეების აღსანიშნავად ვიყენებთ გადაადგილების ვექტორის მომენტების აღნიშვნებს, თუმცა ეს საძიებელი სიდიდეები, საზოგადოდ, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, არ არიან გადაადგილების ვექტორის მომენტები, მაგრამ მათკენ მიისწრაფვიან, როცა  $N \rightarrow +\infty$ . ამას იმასაც თუ დავუმატებთ, რომ რეგულარულ (არაწამახვილებულ) შემთხვევაში N-ურ მიახლოებაში დასმული ამოცანების ამონახსნები მიისწრაფვიან შესაბამისი სამგანზომილებიანი ამოცანების ზუსტი ამონახსნებისკენ [5, 6, 11, 12], ნათელი გახდება, რომ N-ურ მიახლოებაში ასეთი დასმა სავსებით მისაღებია. წამახვილებული გარსების შემთხვევაში საძიებელი ფუნქციების ვიწრო კლასისათვის იგივე ფაქტს აქვს ადგილი [18], ხოლო ამოცანების ბუნებრივ წონიან სივრცეებში განხილვისას  $N \rightarrow +\infty$  დროს შესაბამისი სამგანზომილებიანი ამოცანების დასმა სცილდება კლასიკურის ფარგლებს, რადგან ან არე არ არის ლიპშიცის, ან წერტილებში და წირების გასწვრივ შეყურსული ძალები იჩენს თავს [20, 21].

ნულოვან მიახლოებაში (1.1.9) სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს [31, 1]

$$\begin{aligned} & \mu \Delta (h^{-1} u_{\beta 0}) + (\lambda + \mu) (h^{-1} u_{\gamma 0})_{,\gamma\beta} + \lambda (\ln h)_{,\beta} (h^{-1} u_{\alpha 0})_{,\alpha} \\ & + \mu (\ln h)_{,\alpha} (h^{-1} u_{\alpha 0})_{,\beta} + \mu (\ln h)_{,\alpha} (h^{-1} u_{\beta 0})_{,\alpha} + \frac{X_{\beta}^0}{h} \\ & = \rho \frac{\partial h^{-1} u_{\beta 0}}{\partial t^2}, \beta = 1, 2, \\ & \Delta (h^{-1} u_{30}) + (\ln h)_{,\alpha} (h^{-1} u_{30})_{,\alpha} + \frac{X_3^0}{\mu h} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial h^{-1} u_{30}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

სადაც



$${}^0 X_j = Q_{nj}^{(+)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2} + Q_{nj}^{(-)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(-)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)}\right)^2} + \Phi_{j0},$$

$$Q_{nj}^{(+)} = X_{ij} \left( x_1, x_2, h, t \right) \cos \left( n, x_i \right)^{+},$$

$$Q_{nj}^{(-)} = X_{ij} \left( x_1, x_2, h, t \right) \cos \left( n, x_i \right)^{-}.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში გადაადგილების ვექტორი (იხ.[1])

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) \cong \frac{1}{2h} \vec{u}_0(x_1, x_2, t).$$

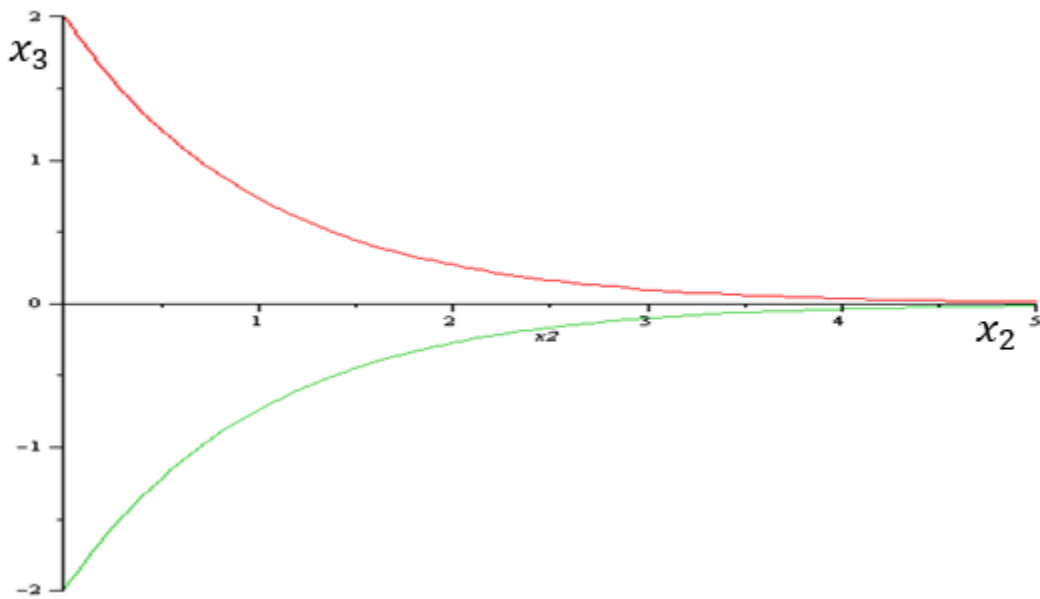
## თავი 2

### §2.1 უსასრულობაში ქრობადი სისქის მქონე პრიზმული გარსი

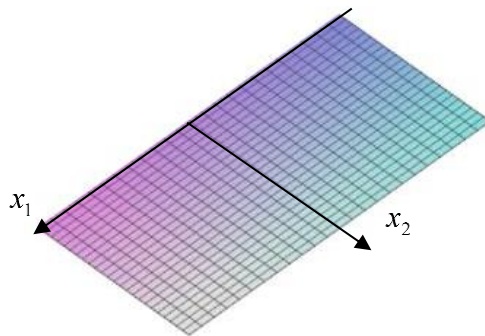
განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ფირფიტის ნახევარსისქე იცვლება შემდეგი კანონით

$$h = h_0 e^{-\alpha x_2}, \text{ სადაც } h_0, \alpha = \text{const} > 0, -\infty < x_1 < +\infty, 0 \leq x_2 < \infty, \quad (2.1.1)$$

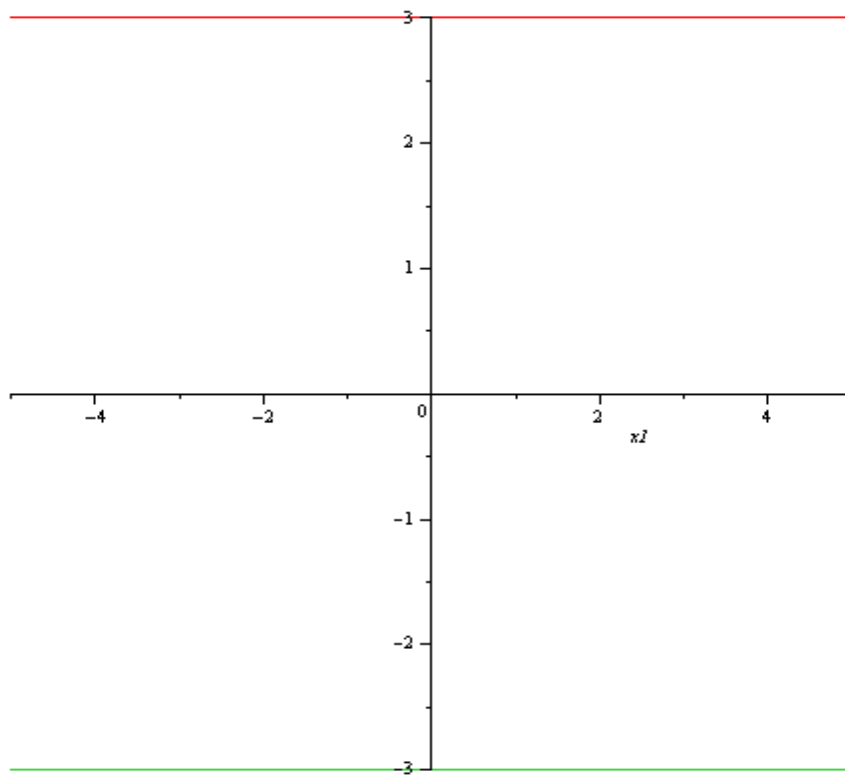
მაშინ შესაბამის ფირფიტის პროფილებს ექნებათ ნახ.2.1-ზე მოცემული სახე.



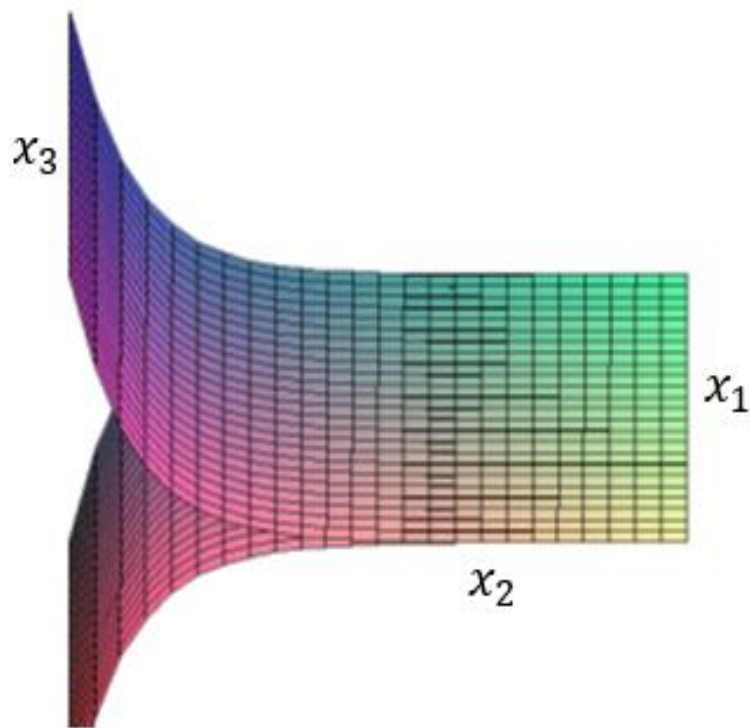
ნახ.2.1 ფირფიტის პროფილები



ნახ.2.2 ფირფიტის გეგმილი  $Ox_1x_2$  სიბრტყეზე



ნახ.2.3 ფირფიტის კვეთა  $Ox_1x_3$  სიბრტყით



ნახ.2.4 ფირფიტის ზედა და ქვედა ზედაპირები

N=0 მიახლოებაში (1.13) სისტემა მიიღებს სახეს (იხ. [31])

$$\begin{aligned} & \mu \left[ (h\nu_{i0,\beta})_{,\beta} + (h\nu_{\beta 0,i})_{,\beta} \right] + \lambda \delta_{i\beta} (h\nu_{\gamma 0,\gamma})_{,\beta} \\ & + Q_{vi}^{(+)} \sqrt{1 + \left( h_{,1}^{(+)} \right)^2 + \left( h_{,2}^{(+)} \right)^2} + Q_{vi}^{(-)} \sqrt{1 + \left( h_{,1}^{(-)} \right)^2 + \left( h_{,2}^{(-)} \right)^2} + \Phi_{i0} = \rho h \ddot{v}_{i0} , \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

სადაც

$$v_{i0} = \frac{1}{h} u_{i0} .$$

კერძოდ, როცა  $i = \alpha$

$$\begin{aligned} & \mu \left[ (h\nu_{\alpha 0,\beta})_{,\beta} + (h\nu_{\beta 0,\alpha})_{,\beta} \right] + \lambda \delta_{\alpha\beta} (h\nu_{\gamma 0,\gamma})_{,\beta} \\ & + Q_{v\alpha}^{(+)} \sqrt{1 + \left( h_{,1}^{(+)} \right)^2 + \left( h_{,2}^{(+)} \right)^2} + Q_{v\alpha}^{(-)} \sqrt{1 + \left( h_{,1}^{(-)} \right)^2 + \left( h_{,2}^{(-)} \right)^2} + \Phi_{\alpha 0} = \rho h \ddot{v}_{\alpha 0} , \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

ხოლო, როცა  $i=3$

$$\mu \left[ (h\nu_{30,\beta})_{,\beta} \right] + Q_{v3}^{(+)} \sqrt{1 + \left( h_{,1}^{(+)} \right)^2 + \left( h_{,2}^{(+)} \right)^2} + Q_{v3}^{(-)} \sqrt{1 + \left( h_{,1}^{(-)} \right)^2 + \left( h_{,2}^{(-)} \right)^2} + \Phi_{30} = \rho h \ddot{v}_{30} . \quad (2.1.4)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\begin{aligned} & Q_{v\alpha}^{(+)} \sqrt{1 + \left( h_{,1}^{(+)} \right)^2 + \left( h_{,2}^{(+)} \right)^2} + Q_{v\alpha}^{(-)} \sqrt{1 + \left( h_{,1}^{(-)} \right)^2 + \left( h_{,2}^{(-)} \right)^2} + \Phi_{\alpha 0} = F_{\alpha 0} , \quad \alpha = 1, 2, \\ & Q_{v3}^{(+)} \sqrt{1 + \left( h_{,1}^{(+)} \right)^2 + \left( h_{,2}^{(+)} \right)^2} + Q_{v3}^{(-)} \sqrt{1 + \left( h_{,1}^{(-)} \right)^2 + \left( h_{,2}^{(-)} \right)^2} + \Phi_{30} = F_{30} . \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

(2.1.5)–ის გათვალისწინებით (2.1.3) , (2.1.4)–დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \mu \left[ (h\nu_{\alpha 0,\beta})_{,\beta} + (h\nu_{\beta 0,\alpha})_{,\beta} \right] + \lambda \delta_{\alpha\beta} (h\nu_{\gamma 0,\gamma})_{,\beta} + F_{\alpha 0} = \rho h \ddot{v}_{\alpha 0} , \quad \alpha = 1, 2, \\ & \mu (h\nu_{30,\beta})_{,\beta} + F_{30} = \rho h \ddot{v}_{30} . \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

(2.1.6)–დახ

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu)(h\nu_{10,1})_{,1} + \mu \left[ (h\nu_{10,2})_{,2} + (h\nu_{20,1})_{,2} \right] + \lambda (h\nu_{20,2})_{,1} + F_{10} &= \rho h \ddot{v}_{10} , \\
 (\lambda + 2\mu)(h\nu_{20,2})_{,2} + \mu \left[ (h\nu_{20,1})_{,1} + (h\nu_{10,2})_{,1} \right] + \lambda (h\nu_{10,1})_{,2} + F_{20} &= \rho h \ddot{v}_{20} , \\
 \mu \left[ (h\nu_{30,1})_{,1} + (h\nu_{30,2})_{,2} \right] + F_{30} &= \rho h \ddot{v}_{30} .
 \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

ჩავსვათ (2.1.7) განტოლებებში (2.1.1), გავამრავლოთ  $e^{\alpha x_2}$ -ზე, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu)(h_0\nu_{10,11}) + \mu \left[ h_0\nu_{10,22} + h_0\nu_{20,12} - \alpha h_0\nu_{10,2} - \alpha h_0\nu_{20,1} \right] \\
 + \lambda h_0\nu_{20,21} + F_{10}e^{\alpha x_2} &= \rho h_0 \ddot{v}_{10} , \\
 (\lambda + 2\mu)(h_0\nu_{20,22} - \alpha h_0\nu_{20,2}) + \mu (h_0\nu_{20,11} + h_0\nu_{10,21}) \\
 + \lambda (h_0\nu_{10,12} - \alpha h_0\nu_{10,1}) + F_{20}e^{\alpha x_2} &= \rho h_0 \ddot{v}_{20} , \\
 \mu (h_0\nu_{30,11} + h_0\nu_{30,22} - \alpha h_0\nu_{30,2}) + F_{30}e^{\alpha x_2} &= \rho h_0 \ddot{v}_{30} .
 \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

## §2.2. ცილინდრული ღუნვის ამოცანა

განვიხილოთ ცილინდრული ღუნვის ამოცანა, ე.ი შემთხვევა როცა ყველა სიდიდე მხოლოდ ერთ  $x_2$  ცვლადზეა დამოკიდებული. (2.1.8) განტოლებები მიიღებს სახეს

$$\begin{aligned} v_{10,22} - \alpha v_{10,2} &= -\frac{1}{\mu h_0} F_{10} e^{\alpha x_2}, \\ v_{20,22} - \alpha v_{20,2} &= -\frac{1}{(\lambda + 2\mu) h_0} F_{20} e^{\alpha x_2}, \\ v_{30,22} - \alpha v_{30,2} &= -\frac{1}{\mu h_0} F_{30} e^{\alpha x_2}. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

(2.2.1) განტოლებები არის წრფივი არაერთგვაროვანი მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები. გადავწეროთ (2.2.1) მატრიცულად

$$v_{,22} - \alpha v_{,2} = f, \quad (2.2.2)$$

სადაც

$$\begin{aligned} v &= (v_{10}, v_{20}, v_{30})^T, \quad f = (f_{10}, f_{20}, f_{30})^T, \\ f_{10} &= -\frac{1}{\mu h_0} F_{10} e^{\alpha x_2}, \quad f_{20} = -\frac{1}{(\lambda + 2\mu) h_0} F_{20} e^{\alpha x_2}, \quad f_{30} = -\frac{1}{\mu h_0} F_{30} e^{\alpha x_2}. \end{aligned}$$

(2.2.2) განტოლება ამოვხსნათ შემდეგი სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით

$$\begin{aligned} v(0) &= v^0, \quad v^0 = const, \\ |v(x_2)| &= O(1), \quad x_2 \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

(2.2.2) და (2.2.3) განტოლების ამონახსნს ვეძებთ შემდეგ კლასში

$$v \in C^2([0; +\infty]) \cup C^1([0; +\infty]).$$

$f$  - მოცემული ფუნქციაა,  $f \in C([0; +\infty])$ .

(2.2.2) განტოლების ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი

$$v = C_1(x_2) e^{\alpha x_2} + C_2(x_2)$$

სახით.

$C_i(x_2)$  ფუნქციები განისაზღვრება შემდეგი სისტემიდან

$$\begin{aligned} C_1'(x_2)e^{\alpha x_2} + C_2'(x_2) &= 0, \\ C_1'(x_2) &= \frac{1}{\alpha} f, \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} C_1(x_2) &= \int_0^{x_2} f d\xi + d_1, \\ C_2(x_2) &= -\int_0^{x_2} f e^{\alpha \xi} d\xi + d_2, \\ d_1, d_2 &= \text{const}, \end{aligned}$$

$$v(x_2) = C_1(x_2)e^{\alpha x_2} + C_2(x_2) = \frac{e^{\alpha x_2}}{\alpha} \int_0^{x_2} f d\xi + e^{\alpha x_2} d_1 - \frac{1}{\alpha} \int_0^{x_2} f e^{\alpha \xi} d\xi + d_2. \quad (2.2.4)$$

ვთქვათ  $f = 0$ , მაშინ

$$v(x_2) = d_1 e^{\alpha x_2} + d_2. \quad (2.2.5)$$

(2.2.5)-ის გათვალისწინებით (2.2.3) პრობები კმაყოფილდება, როცა  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = v^0$ .

უკანასკნელი ტოლობების ძალით (2.2.5)-დან ვღებულობთ

$$v = v^0.$$

ახლა, ვთქვათ  $f \neq 0$  იგიურად.

(2.2.3)-სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით

$$d_1 = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f d\xi, \quad d_2 = v^0 - d_1 = v^0 + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f d\xi.$$

საბოლოოდ (2.2.2) განტოლების ამონახსნს, (2.2.3) სასაზღვრო პირობებში აქვს შემდეგი სახე

$$\begin{aligned} v(x_2) &= \frac{e^{\alpha x_2}}{\alpha} \int_0^{x_2} f d\xi - \frac{e^{\alpha x_2}}{\alpha} \int_0^\infty f d\xi - \frac{1}{\alpha} \int_0^{x_2} f e^{\alpha \xi} d\xi + v^0 + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f d\xi = \\ &= -\frac{e^{\alpha x_2}}{\alpha} \int_{x_2}^\infty f d\xi - \frac{1}{\alpha} \int_0^{x_2} f e^{\alpha \xi} d\xi + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f d\xi + v^0 \end{aligned}$$

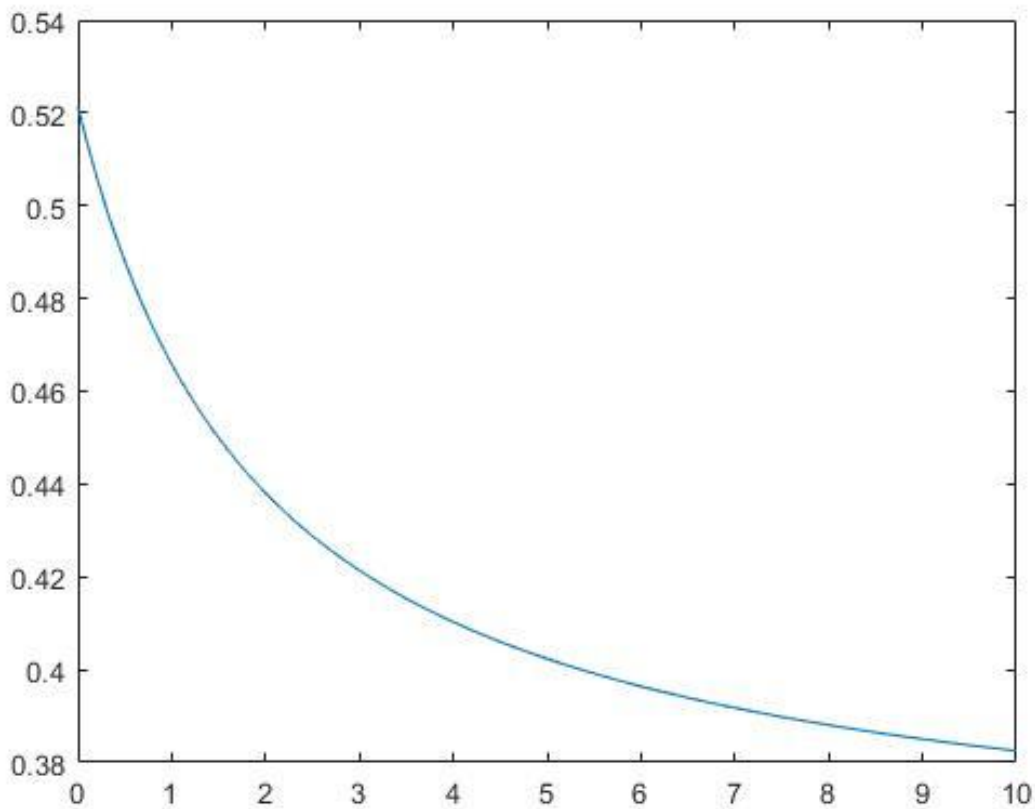
ერთ-ერთი საკმარისი პირობა (2.2.3)-ის შესრულებისათვის არის

$$f(x_2) = A(x_2)e^{-\alpha x_2}, \text{ სადაც } A(x_2) = \frac{B(x_2)}{(x_2 + c)^\beta}, \beta > 1, c > 0, B(x_2) \in C([0; +\infty)).$$

როცა

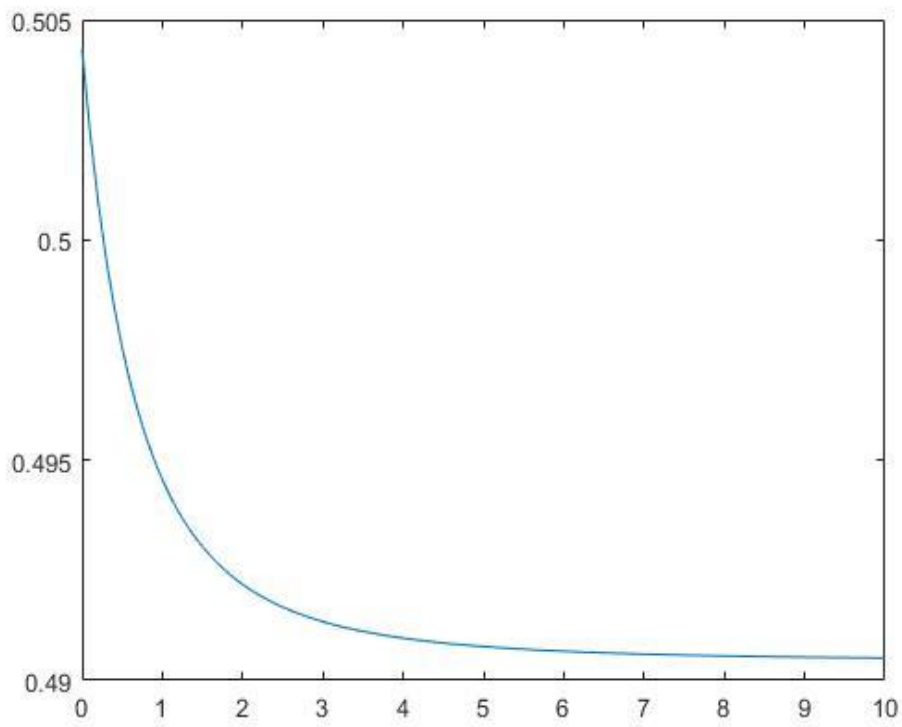
$$f(x_2) = \frac{e^{-3x_2}}{(x_2 + 2)^2}, f(x_2) = \frac{e^{-3x_2}}{(x_2 + 2)^4}, f(x_2) = \frac{e^{-3x_2}}{(x_2 + 2)^5}$$

ამონახსნებს ექნებათ ნახ.2.5, ნახ.2.6 და ნახ.2.7-ზე მოცემული სახეები, სადაც ჰორიზონტალურ ღერძზე მოცემულია  $x_2$ -ის მნიშვნელობები, ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე -  $V(x_2)$  ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები.

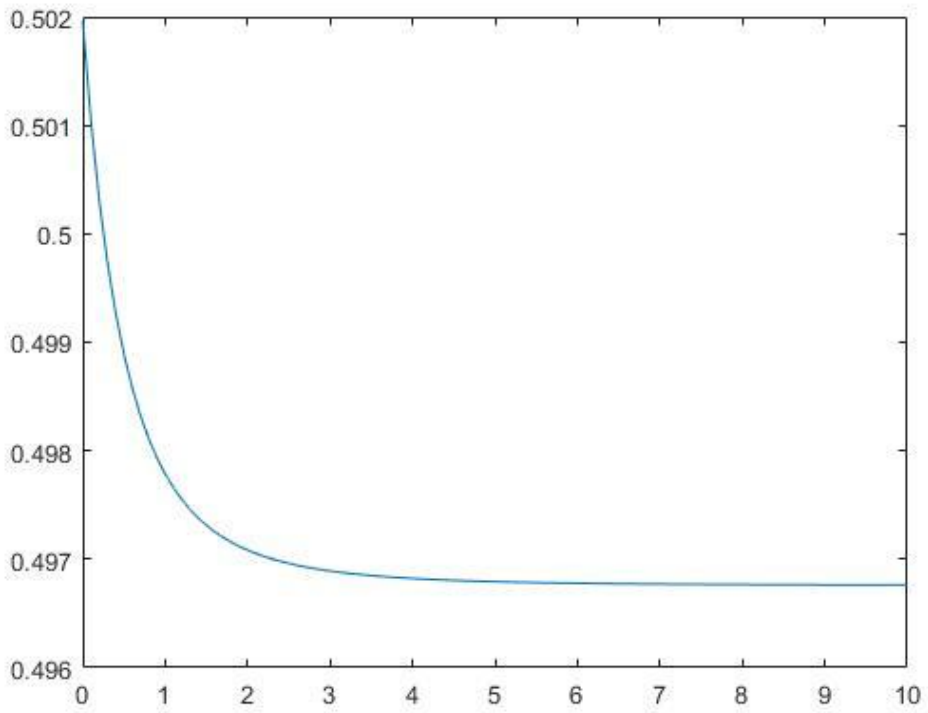


ნახ.2.5





бсб.2.6



бсб.2.7

### §2.3. ცილინდრული რხევის ამოცანა

განვიხილოთ ცილინდრული რხევის ამოცანა, ე.ი შემთხვევა როცა ყველა სიდიდე  $x_2$  ცვლადზე და  $t$  დროზეა დამოკიდებული. (2.1.9) განტოლებები მიიღებს სახეს

$$\begin{aligned} \mu(h_0 v_{10,22} - \alpha h_0 v_{10,2}) + F_{10} e^{\alpha x_2} &= \rho h_0 \ddot{v}_{10}, \\ (\lambda + 2\mu)(h_0 v_{20,22} - \alpha h_0 v_{20,2}) + F_{20} e^{\alpha x_2} &= \rho h_0 \ddot{v}_{20}, \\ \mu(h_0 v_{30,22} - \alpha h_0 v_{30,2}) + F_{30} e^{\alpha x_2} &= \rho h_0 \ddot{v}_{30}. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

(2.3.1) განტოლებები არის წრფივი არაერთგვაროვანი მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლება.

სისტემის ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით

$$\begin{aligned} v(0) = v^0, v^0 &= const, \\ |v(x_2)| &= O(e^{\alpha x_2}), \quad x_2 \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

ან

$$\begin{aligned} v(0) = v^0, v^0 &= const, \\ |v(x_2)| &= O(1), \quad x_2 \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

განვიხილოთ ჰარმონიული რხევის ამოცანა

$$v = e^{i\omega t} X(x_2) \text{ და } e^{\alpha x_2} F_{i0} = -F_i(x_2) e^{i\omega t}, \quad \omega = const, \quad i = 1, 2, 3.,$$

სადაც

$$v = (v_{10}, v_{20}, v_{30})^T, \quad F_{i0} = (F_{10}, F_{20}, F_{30})^T, \quad X = (X_{10}, X_{20}, X_{30})^T.$$

(2.3.1) განტოლებებს ექნებათ სახე

$$\begin{aligned} X_{10,22} - \alpha X_{10,2} + \frac{\rho \omega^2}{\mu} X_{10} &= \frac{F_1}{\mu h_0}, \\ X_{20,22} - \alpha X_{20,2} + \frac{\rho \omega^2}{\mu} X_{20} &= \frac{F_2}{h_0 (\lambda + \mu)}, \\ X_{30,22} - \alpha X_{30,2} + \frac{\rho \omega^2}{\mu} X_{30} &= \frac{F_3}{\mu h_0}. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

(2.3.4) განტოლებები ჩავწეროთ მატრიცულად

$$X_{,22} - \alpha X_{,2} + \frac{\rho\omega^2}{\mu} X = f, \quad (2.3.5)$$

სადაც

$$f := (f_1, f_2, f_3)^T = \left( \frac{F_1}{\mu h_0}, \frac{F_2}{h_0(\lambda + \mu)}, \frac{F_3}{\mu h_0} \right)^T, \\ f \in C([0; +\infty)) \text{ , } |f(x_2)| = O(1) \text{ , } x_2 \rightarrow +\infty. \quad (2.3.6)$$

(2.3.2) და (2.3.3) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, (2.3.5) განტოლების ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სასაზღვრო პირობებით

$$X(0) = 0, \quad (2.3.7)$$

$$|X(x_2)| = O(e^{\alpha x_2}) \text{ , } x_2 \rightarrow \infty. \quad (2.3.8)$$

ან

(2.3.7) და

$$|X(x_2)| = O(1) \text{ , } x_2 \rightarrow \infty, \quad (2.3.9)$$

სადაც

$$X \in C^2([0; +\infty[) \cup C^1([0; +\infty[), \quad f \in C([0; +\infty[).$$

(2.3.5) განტოლების ამონახსნები (2.3.7) სასაზღვრო პირობებში  $\omega$ -ს სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის მოიცემა შემდეგი სახით

1) როცა

$$\omega^2 < \frac{\alpha^2 \mu}{4\rho},$$

მაშინ

$$X(x_2) = \frac{e^{\eta_1 x_2}}{\eta_1 - \eta_2} \int_0^{x_2} f(\xi) e^{-\eta_1 \xi} d\xi + \frac{e^{\eta_2 x_2}}{\eta_2 - \eta_1} \int_0^{x_2} f(\xi) e^{-\eta_2 \xi} d\xi \quad (2.3.10)$$

სადაც

$$\eta_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \frac{4\rho\omega^2}{\mu}}}{2}, \quad \eta_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \frac{4\rho\omega^2}{\mu}}}{2}.$$

2) როცა

$$\omega^2 = \frac{\alpha^2 \mu}{4\rho},$$

მაშინ

$$X(x_2) = x_2 e^{\frac{\alpha}{2} x_2} \int_0^{x_2} f(\xi) e^{-\frac{\alpha}{2} \xi} d\xi - e^{\frac{\alpha}{2} x_2} \int_0^{x_2} f(\xi) \xi e^{-\frac{\alpha}{2} \xi} d\xi, \quad (2.3.11)$$

სადაც

$$\eta = \frac{\alpha}{2}.$$

3) როცა

$$\omega^2 > \frac{\alpha^2 \mu}{4\rho},$$

მაშინ

$$X(x_2) = \frac{1}{k} e^{\frac{\alpha}{2} x_2} \sin(kx_2) \int_0^{x_2} f(\xi) e^{-\frac{\alpha}{2} \xi} \cos(k\xi) d\xi - \frac{1}{k} e^{\frac{\alpha}{2} x_2} \cos(kx_2) \int_0^{x_2} f(\xi) e^{-\frac{\alpha}{2} \xi} \sin(k\xi) d\xi, \quad (2.3.12)$$

სადაც

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\rho\omega^2}{\mu} - \alpha^2}.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ

$$\eta_1 < \eta_2 \text{ და } \eta_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \frac{4\rho\omega^2}{\mu}}}{2} < \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2}}{2} = \alpha,$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ (2.3.10), (2.3.11) და (2.3.12) აკმაყოფილებენ (2.3.8) პირობებს.

განვიხილოთ (2.3.5), (2.3.7), (2.3.9) ამოცანა. საზოგადოდ, (2.3.9) პირობები

დაკმაყოფილდება ნებისმიერი  $f$  ფუნქციისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$f(x_2) = \frac{B(x_2)}{(x_2 + c)^\beta}, \quad \beta > 1, \quad c > 0, \quad B(x_2) > 0, \quad B(x_2) \in C([0; +\infty)), \quad |B(x_2)| = O(1), \quad x_2 \rightarrow \infty.$$

მხოლოდ მაშინ როცა  $\alpha = 0$ ;

მართლაც

$$\begin{aligned}
X(x_2) &= \frac{\mu}{\rho\omega^2} \left( \sin\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu}x_2\right) \int_0^{x_2} f(\xi) \cos\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu}\xi\right) d\xi - \cos\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu}x_2\right) \int_0^{x_2} f(\xi) \sin\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu}\xi\right) d\xi \right). \\
|X(x_2)| &\leq \frac{\mu}{\rho\omega^2} \left( \left| \sin\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu}x_2\right) \int_0^{x_2} f(\xi) \cos\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu}\xi\right) d\xi \right| + \left| -\cos\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu}x_2\right) \int_0^{x_2} f(\xi) \sin\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu}\xi\right) d\xi \right| \right) \\
&\leq \frac{\mu}{\rho\omega^2} \left( \left| \int_0^{x_2} f(\xi) \cos\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu}\xi\right) d\xi \right| + \left| \int_0^{x_2} f(\xi) \sin\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu}\xi\right) d\xi \right| \right) \\
&\leq \frac{\mu}{\rho\omega^2} \left( \int_0^{x_2} |f(\xi)| \left| \cos\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu}\xi\right) \right| d\xi + \int_0^{x_2} |f(\xi)| \left| \sin\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu}\xi\right) \right| d\xi \right) \leq \\
&\leq 2 \frac{\mu}{\rho\omega^2} \int_0^{x_2} |f(\xi)| d\xi = O(1) \quad , \quad x_2 \rightarrow +\infty .
\end{aligned}$$

თუ  $f(x_2)$  ფუნქცია წარმოდგენილია შემდეგი სახით

$$f(x_2) = \varphi''(x_2) - \alpha\varphi'(x_2) + \frac{\rho\omega^2}{\mu}\varphi(x_2) ,$$

სადაც

$$\varphi(x_2) \in C^2([0; +\infty))$$

ისეთი ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

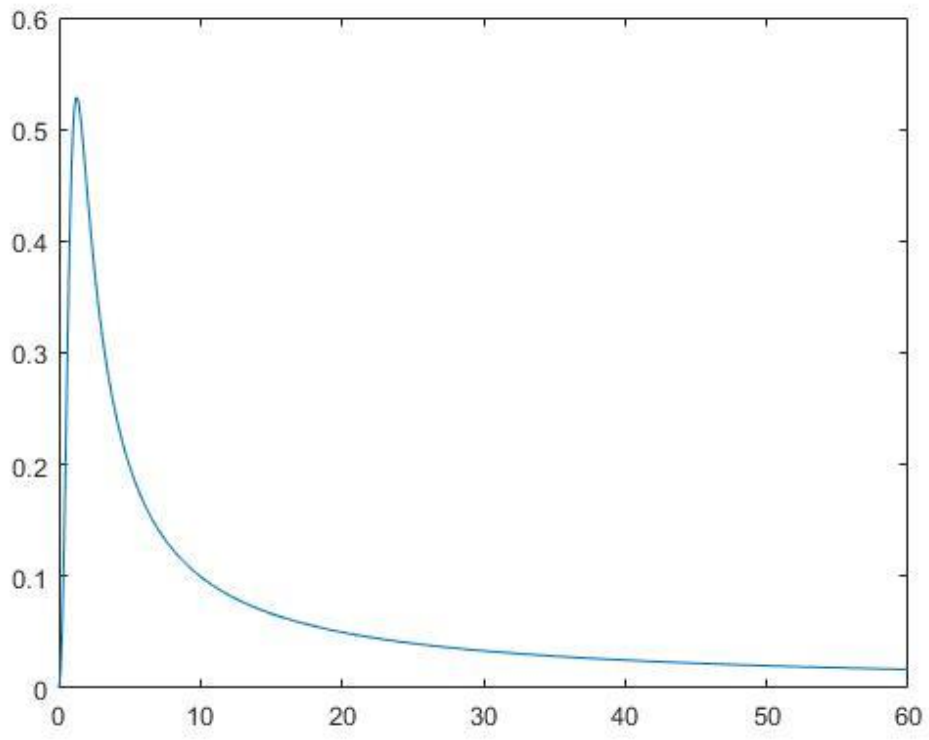
$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= 0 , \quad \varphi'(0) = 0 , \\
|\varphi(x_2)| &= O(1) , \quad |\varphi'(x_2)| = O(1) , \quad |\varphi''(x_2)| = O(1) , \quad x_2 \rightarrow +\infty ,
\end{aligned}$$

მაშინ (2.3.10), (2.3.11), (2.3.12) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

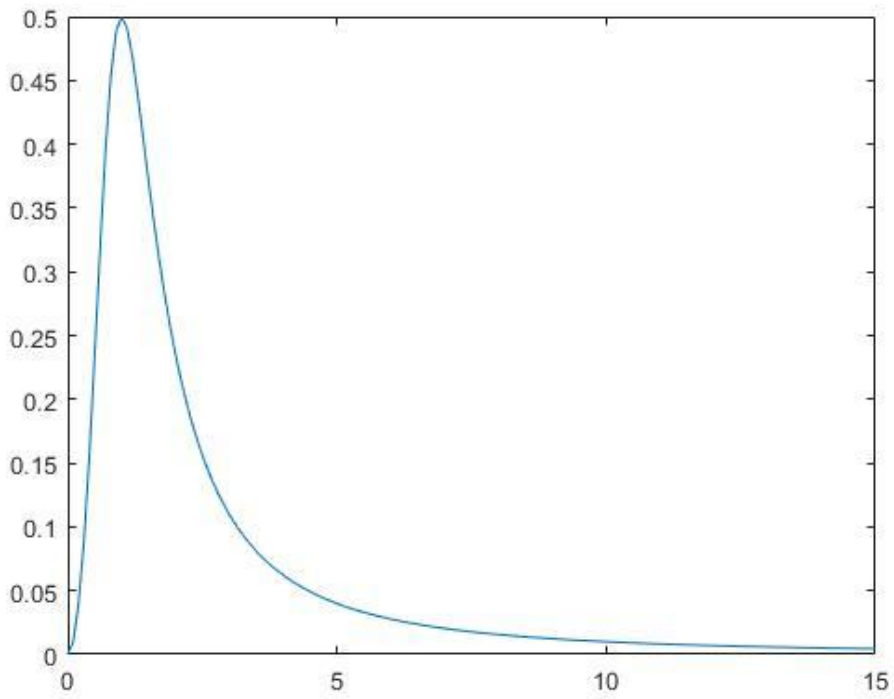
ამონახსნების შესაბამისი გრაფიკები როცა

$$\varphi(x_2) = \frac{x_2^2}{x_2^3 + 1} , \quad \varphi(x_2) = \frac{x_2^2}{x_2^4 + 1} \quad \text{და} \quad \varphi(x_2) = e^{-\alpha x_2} \frac{x_2^4}{x_2^6 + 1}$$

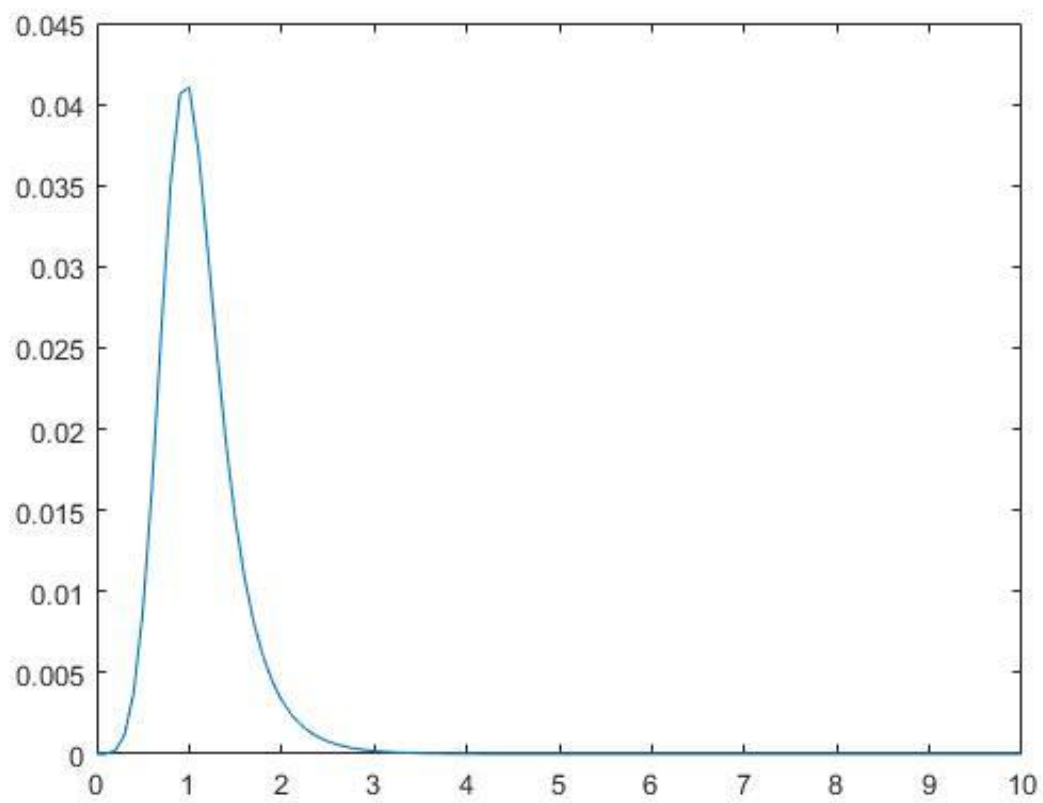
მოცემულია ნახ.2.8, ნახ.2.9 და ნახ.2.10-ზე, სადაც ჰორიზონტალურ ღერძზე მოცემულია  $x_2$ -ის მნიშვნელობები, ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე -  $X(x_2)$  ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები.



бсб.2.8



бсб.2.9



Биб.2.10

## დასკვნა

ლამეს სისტემის გამოყენებით შესწავლილია ისეთი პრიზმული გარსის ცილინდრული ღუნვის ამოცანა, როცა ყველა სიდიდე წერტილის მხოლოდ ერთ კოორდინატზეა დამოკიდებული და ცილინდრული რხევის ამოცანა, როცა ყველა სიდიდე წერტილის მხოლოდ ერთ კოორდინატზე და დროზეა დამოკიდებული. სისტემა იცვლება შემდეგი კანონით

$$2h(x_2) = 2h_0 e^{-\alpha x_2}, \text{ სადაც, } h_0 = \text{const}, \alpha = \text{const}, 0 \leq x_2 < \infty; -\infty < x_1 < +\infty, (x_1, x_2) \in \omega$$

სადაც  $\omega$  ფორფიტის გეგმილია  $Ox_1x_2$  სიბრტყეში,

$$\omega := \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, 0 < x_2 < +\infty\}.$$

დაწერილია პირობები რომლისთვისაც ამოცანას ერთადერთი ამონახსნი აქვს. რიცხვითი ამონახსნები წარმოდგენილია ვიზუალური ფორმით შესაბამისი გრაფიკებით.



## ციტირებული ლიტერატურა

1. ჯაიანი გ. უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა (2004)
2. Avalishvili G. Avalishvili M., On a hierarchical model of elastic rods with variable cross-sections. *Appl. Math. Inform. Mech.*, 9, 1 (2004), 1–16
3. Avalishvili G., Avalishvili M., Investigation of dynamical one-dimensional models for elastic rods with variable cross-sections. *Bull. Georgian Acad. Sci.*, 174, 3(2006), 399–402
4. Avalishvili G., Avalishvili M., On the investigation of one-dimensional models for thermoelastic beams. *Bull. Georgian Acad. Sci.*, 3, 3, (2009), 25–32
5. Avalishvili M., Gordeziani D., Investigation of two-dimensional models of elastic prismatic shells, *Georgian Mathematical Journal*, 10, 1 (2003), 17-36
6. Avalishvili M., Gordeziani D., Investigation of a hierarchical model of prismatic shells, *Bull. Georgian Acad. Sci.*, 165, 3 (2001), 485-488
7. Chinchaladze N, Gilbert R. P., Kharibegashvili S.; Natroshvili D. Cusped Elastic Beams under the Action of Stresses and Concentrated Forces. *Applicable Analysis*, 89, 5, (2010), 757–774, access: <http://www.tandf.co.uk/journals>
8. Chinchaladze N., Gilbert R.P., Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Existence and uniqueness theorems for cusped prismatic shells in the N-th hierarchical model, *Mathematical Methods in Applied Sciences*, 31, 11 (2008) 1345-1367
9. Chinchaladze N., Jaiani G., Maistrenko B., Podio-Guidugli P., Concentrated contact interactions in cuspidate prismatic shell-like bodies, *Archive of Applied Mechanics*, 81, 10 (2011) , 1487-1505
10. Chinchaladze N., On some Nonclassical Problems for Differential Equations and Their Applications to the Theory of Cusped Prismatic Shells. *Lecture Notes of TICMI*, 9 (2008)
11. Gordeziani D., On the solvability of some boundary value problems for a variant of the theory of thin shells, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 215, 6 (1974), 1289-1292
12. Gordeziani D., To the accuracy of one variant of the theory of thin shells, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 215, 4 (1974), 751-754
13. Jaiani G. *Cusped Shell-like Structures* Springer, Heidelberg-Dorbrecht-London-New York, 2011

14. Jaiani G., Application of Vekua's dimension reduction method to cusped plates and bars, *Bull. TICMI*, 5 (2001), 27-34
15. Jaiani G., chinchaladze N., Cylindrical bending of a cusped plate with big deflections, *Sournal of Math. Suences*, 157, 1 (2009), 52-69
16. Jaiani G., Elastic bodies with non-smooth boundaries – cusped plates and shells, *ZAMM*, 76, Suppl. 2 (1996), 117-120.
17. Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Wendland W., Two-dimensional hierarchical models for prismatic shells with thickness vanishing at the boundary, *Journal of Elasticity*, 77, 2 (2004), 95-122
18. Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Wendland W.L., Hierarchical Models for Elastic Cusped Plates and Beams, *Lecture Notes of TICMI*, 4, 2003
19. Jaiani G., On a mathematical model of bars with variable restangular Cross-sections, *ZAMM-Z. Angew. Math. Mech.*, 81, 3 (2001), 147-173
20. Jaiani G., Relation of hierarchical models of cusped elastic plates and shells to the three-dimensional models, *Reports of Seminar of I.Vekua Inst. of Appl. Math.*, 28 (2002), 40-51.
21. Jaiani G., Some remarks concerning cusped plates and beams, *Transactions of the Georgian Technical University*, 1, 447 (2003), 44-48
22. Jaiani G., Theory of Cusped Euler-Bernoulli beams and Kirchhof-Love plates, *Lecture Notes of TICMI*, 3, 2002
23. Jaiani G.V., Kharibegashvili S.S., Natroshvili D.G. and Wendland W.L., Two-dimensional hierarchical models for prismatic shells with thickness vanishing at the boundary, *Journal of Elasticity*, 77 (2004), 95-112
24. Meunargia T., On one method of construction of geometrically and physically nonlinear theory of non-shallow shells, *Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, Georgian Academy of Sciences*, 119 (1999), 133-154
25. Mikhlin S.G., *Variational Methods in Mathematical Physics*. Nauka, Moscow, 1970 (Russian)
26. Vashakmadze T., *The Theory of Anisotropic Plates*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-London--Boston, 1999
27. Vekua I.N. On a way of calculating of prismatic shells. *Proceedings of A.Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences*, 21 (1955), 191-259 (Russian)
28. Vekua I.N., *Shell Theory: General Methods of Construction*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melburne, 1985

29. Vekua I.N., The theory of thin shallow shells of variable thickness. Proceedings of A. Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences, 30 (1965), 5-103 (Russian)
30. Векуа И.Н., Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек, Наука, Москва, 1982
31. Векуа И.Н., Об одном методе расчета призматических оболочек, Труды Тбилисского математического института им. А.Размадзе Академии наук Грузии, 21, (1955), 191-259
32. Векуа И.Н., Теория тонких пологих оболочек переменной толщины, Труды Тбилисского математического института им. А.Размадзе Академии наук Грузии, 30 (1965), 5-103
33. Джаиани Г.В., Решение некоторых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения и их применения к призматическим оболочкам, Изд-ство ТГУ, Тб., 1982