ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მარიამ გურული

ანალიზურ კოეფიციენტებიანი მეორე რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემები ოთხი განსაკუთრებული წერტილით

გამოყენებითი მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია გამოყენებითი მათემატიკის მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელი : გია გიორგაძე

ფიზიკა-მათემატიკის

მეცნიერებათა დოქტორი,

ასოცირებული პროფესორი.

თბილისი

2016

ანალიზურ კოეფიციენტებიანი მეორე რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემები ოთხი განსაკუთრებული წერტილით

ანოტაცია

ნაშრომში შესწავლილია მერომორფულ კოეფიციენტებიანი მეორე რიგის წრფივ განტოლებათა ისეთი სისტემები, რომელთა ამონახსნებიც რეგულარულია. თუ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტები პირველი რიგის პოლუსების მქონე მერომორფული მატრიცული ფუნქციებია, მაშინ სისტემა რეგულარულია და იგი ჩაიწერება კანონიკური სახით. ნაშრომში შესწავლის ძირითადი ობიექტია ასეთი სისტემები იმ შემთხვევაში, როდესაც განსაკუთრებული წერტილების რაოდენობა ოთხია. ამგვარ სისტემათა კლასი მოიცავს, მაგალითად, ჰოინის ცნობილ განტოლებას.

ნაშრომი შედგება შესავლისა და ორი თავისაგან, შესავალში მოყვანილია აუცილებელი განმარტებები ფუქსის ტიპის განტოლებებისა და განტოლებათა სისტემების შესახებ. პირველი და მეორე თავის ნაწილი რეფერატული ხასიათისაა, სადაც მოცემულია მეორე რიგის განტოლებათა სისტემების დეტალური დახასიათება და მოყვანილია ამონახსნთა გეომეტრიული თვისებები. კერძოდ, ჩამოყალიბებულია შვარც-კრისტოფელის თეორემა, რომელიც დაწვრილებითაა განხილული სამი და ოთხი განსაკუთრებული წერტილების შემთხვევაში. სამი წერტილისათვის მოყვანილია კარგად ცნობილი შედეგები ჰიპერგეომეტრული ფუნქციების გეომეტრიული თვისებების შესახებ. ოთხი წერტილისათვის კი მოყვანილია შედეგები, რომლებიც ნაკლებადაა ცნობილი სამეცნიერო ლიტერატურაში.

ძირითადი შედეგი მოყვანილია მეორე თავის მეოთხე პარაგრაფში. დამტკიცებულია, რომ კონფორმული მოდული ინვარიანტია ჰოინის განტოლებისათვის, კერძოდ ნაჩვენებია, რომ თუ ჰოინის განტოლების განსაკუთრებულ წერტილთა კონფორმული მოდულები ტოლია და ერთი მეორისაგან ჰოლომორფული გარდაქმნით მიიღება, მაშინ მათი შესაბამისი მონოდრომიის ჯგუფები შეუღლებულია. აღნიშნული შედეგი შესაძლებელია განზოგადდეს ამ კლასის განტოლებათა სისტემებისათვის, რაც ჩვენი აზრით ნაშრომში დამტკიცებული ძირითადი შედეგის შედგომი გავრცელება იქნება.

Resumme

In the work second order systems of differential equations with meromorphic coefficients are considered. It is known that when singular points of system are first order poles, such system of equations has canonical form. Main object of investigation is regular system of equations on Riemann sphere, when number of singular points are four, class of such systems contains well known Heun equation.

The structure of work is following. In the introduction and first section given necessary definitions and auxiliaryconstructions. In particular, the geometric and analytic characterization of solution spaces of hypergeometric and Riemann equations geometrically and analytically point of view is considered. Second section dedicated investigation of regular system with four singular pints and gives some results, including Schwarz-Cristoffel theorem, next this results used for proof of main result of the work when given final second section.

Proved that conformal moduli of ordered singular points is invariant for Heun equation. More exactly, proved that if two ordered selection of four points are conformal equivalent and corresponding systems of equations induced from Heun equations with different singular points are gauge equivalent, then Riemann data coincides. This result permits generalization for more general systems of regular equations.

სარჩევი

შესავალი

განვიხილოთ n -ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება

$$y^{(n)}+p_1(z)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(z)y'+p_n(z)y=0 \tag{1}$$

p_i ანალიზურია 0 წერტილის მიდამოში, გარდა შესაძლოა თვით 0-ისა.

დავუშვათ, $z=0$ ან რეგულარულია, ან რეგულარული განსაკუთრებული წერტილია.

ვთქვათ $D=z\dfrac{d}{dz}$, მაშინ

$$z^r\frac{d}{dz^r}=D(D-1)\cdots(D-r+1) \tag{2}$$

<u>მაგალითი 1</u>:

თუ $r=1$, მაშინ $D=z\dfrac{d}{dz}$

თუ $r=2$, მაშინ

$$D(D-1)=D^2-D=z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\right)-z\frac{d}{dz}=z\frac{dz}{dz}+z^2\frac{d^2}{dz^2}-z\frac{d}{dz}=z^2\frac{d^2}{dz^2}$$

(2) -ის გამოყენებით , (1) განტოლებაგადაიწერება

$$D^ny+q_1(z)D^{n-1}y+\ldots+q_{n-1}(z)Dy+q_n(z)y=0 \tag{3}$$

სახით. 0-ის რეგულარული განსაკუთრებულობის გამო (3) განტოლებაში $q_j(z)$ ჰოლომორფული ფუნქციებია.

<u>მაგალითი 2</u>:

თუ $r=1$, მაშინ $z\dfrac{d}{dz}y+q_1(z)y=0$;

თუ $r=2$, მაშინ $z^2\dfrac{d}{dz^2}y+z\dfrac{d}{dz}q_1(z)y+q_2(z)y=0$,

ანუ $z^2y''+zq_1(z)y'+q_2(z)y=0$

(1) განტოლების მახასიათებელი განტოლება $z=0$ წერტილში ვუწოდოთ

$$\lambda^n+q_1(0)\lambda^{n-1}+\ldots+q_{n-1}^{(0)}\lambda+q_n(0)=0 \tag{4}$$

პოლინომიალურ განტოლებას.

(4) განტოლების ფესვებს ეწოდება (1) განტოლების $z=0$ რეგულარული განსაკუთრებული წერტილის ლოკალური ექსპონენტები.

მტკიცდება, რომ ექსპონენტები დამოკიდებულნი არ არიან ცვლადის გარდაქმნაზე.

z_0 წერტილი არის (1)-ის რეგულარული განსაკუთრებული წერტილი (ან რეგულარული წერტილი) , მაშინარსებობს ზღვარი

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^i p_i(z) , \quad i = 1,2,\ldots n .$$

ხოლო $z = \infty$ არის (1)-ის რეგულარული განსაკუთრებული წერტილი (ან რეგულარული წერტილი), თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{z \to z_0} z^i p_i(z) , \quad i = 1,2,\ldots n .$$

<u>დებულება</u>: თუ z_0 არის (1) განტოლების განსაკუთრებული წერტილი და $a_i = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^i p_i(z)$, $i = 1,2,\ldots n$, მაშინ (1)-ის მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$\lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - n + 1) + a_i \lambda(\lambda - i)\ldots(\lambda - n + 2)\ldots a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

ხოლო თუ ∞ რეგულარული განსაკუთრებული წერტილია (ან რეგულარულია) და $a_i = \lim_{z \to z_0} z^i p_i(z)$, მაშინ მახასიათებელი განტოლება იქნება

$$\lambda(\lambda + 1)\ldots(\lambda + n - 1)\ldots a_1 \lambda(\lambda + 1)\ldots(\lambda + n - 2) + \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1}\lambda + (-1)^n a_n = 0 .$$

(1) სახის განტოლებას ეწოდება ფუქსის,თუ მისი ყველა განსაკუთრებული წერტილი რეგულარულია.

რიმანის სქემა ეწოდება გამოსახულებას

$$\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_{m+1} \\ s_1^1 & \ldots & s_{m+1}^1 \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ s_1^n & \ldots & s_{m+1}^n \end{pmatrix}, z$$

სადაც a_j , $j = 1, \cdots, m+1$, რეგულარული განსაკუთრებული წერტილებია, ხოლო s_j^i, $i = 1, \cdots, n$, არიან განსაკუთრებული წერტილის ექსპონენტები.

<u>თეორემა</u>(ფუქსი): (1) განტოლების ყველა ექსპონენტების ჯამი დამოკიდებულია განსაკუთრებული წერტილების რაოდეობაზე :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m+1} s_j = \frac{(m-1)n(n-1)}{2}$$

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$z^2 y''(z) + z y'(z) + (z^2 - \nu^2) y(z) = 0$$

ბესელის განტოლებას აქვს ორი განსაკუთრებული წერტილი $z=0$ და $z=\infty$, მაგრამ ის არ არის ფუქსის ტიპის განტოლება, ხოლო

$$z^2 y''(z)-(a+b-1)zy'(z)+aby(z)=0$$

ეილერის განტოლებას, სადაც a და b ნებისმიერი მუდმივებია,აქვს $z=0$ და $z=\infty$ განსაკუთრებული წერტილი და იგი წარმოადგენს ფუქსის ტიპის განტოლებას. აქვე შევნიშნოთ, რომ ეილერის განტოლება არის მეორე რიგის ორი განსაკუთრებული წერტილის მქონე ფუქსის ტიპის განტოლების კანონიკური სახე.

წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება ანალიზური კოეფიციენტებით კომპლექსურ არეში

$$w^{(n)}+p_1(z)w^{(n-1)}+\ldots+p_n w=0 \ ,$$

რომლის ყველა განსაკუთრებული წერტილი რიმანის სფეროში არის რეგულარული განსაკუთრებული წერტილი, ეკუთვნის ფუქსის განტოლებათა კლასს, სადაც

$$p_j(z)=\prod_{m=1}^{k}\frac{P_j(z)}{(z-a)^j}$$

სადაც $a_1,\cdots,a_k$ ერთმანეთისგან განსხვავებული წერტილები წარმოადგენენ განსაკუთრებულ წერტილებს (∞-სთან ერთად).

მეორე რიგის ფუქსის ზოგად განტოლებას აქვს სახე :

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0$$

სადაც

$$p(z)=\frac{P(z)}{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)}$$

და

$$q(z)=\frac{Q(z)}{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^2}$$

$p(z)$ და $q(z)$ რაციონალური ფუნქციებია, ხოლო $P(z)$ და $Q(z)$ მრავაწევრებია, რომელთა ხარისხები არ აღემატება $(n-1)$ და $(2n-2)$ შესაბამისად.

თუ $p(z)$ და $q(z)$ ფუნქციებს ჩავწერთ შემდეგნაირად :

$$p(z)=\frac{p_0 z^{n-1}+p_z z^{n-2}+\ldots+p_{n-1}}{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)}$$

და

$$q(z)=\frac{q_0 z^{2n-2}+q_1 z^{2n-3}+\ldots+q_{2n-2}}{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^2}$$

მაშინ გვექნება ფუქსის განტოლება ზოგადი სახით :

$$w''+\frac{p_0 z^{n-1}+p_z z^{n-2}+\ldots+p_{n-1}}{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)}w'+\frac{q_0 z^{2n-2}+q_1 z^{2n-3}+\ldots+q_{2n-2}}{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^2}w=0 \; .$$

მეორე რიგის ფუქსის რეგულარული განტოლება $a_1,a_2,\cdots,a_n$ განსაკუთრებული წერტილებით არის :

$$w''+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\left(\rho_1^{(k)}+\rho_2^{(k)}\right)}{z-a_k}w'+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_1^{(k)}\rho_2^{(k)}\prod_{j=1}^{n}\left(z_k-a_j\right)}{z-a_k}+Q_{n-2}(z)\right)\frac{w}{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)}=0$$

განტოლება, სადაც $Q_{n-2}(z)$ არის მრავალწევრი, რომლის ხარისხი არ აღემატება $(n-2)$-ს, ხოლო $\rho_1^{(k)}$ და $\rho_2^{(k)}$ არის მახასიათებელი ექსპონენტები.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ფუქსის განტოლებას აქვს სამი განსაკუთრებული წერტილი a_1,a_2 და a_3. შესაბამისი განტოლება იქნება :

$$w''+\left(\frac{A_1}{z-a_1}+\frac{A_2}{z-a_2}+\frac{A_3}{z-a_3}\right)w'+\left(\frac{B_1}{z-a_1}+\frac{B_2}{z-a_2}+\frac{B_3}{z-a_3}\right)\cdot\frac{w}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}=0 \quad (5)$$

სადაც

$$A_k=1-\left(\rho_1^{(k)}+\rho_2^{(k)}\right)$$

და

$$B_k=\rho_1^{(k)}\rho_2^{(k)}\left(a_k-a_{k-1}\right)\left(a_k-a_{k+1}\right).$$

აღნიშნულ განტოლებას ეწოდება რიმანის განტოლება,ხოლო

$$w=p\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \rho_1^{(1)} & \rho_1^{(2)} & \rho_1^{(3)} \\ \rho_2^{(1)} & \rho_2^{(2)} & \rho_2^{(3)} \end{pmatrix}$$

გამოსახულება იქნება რიმანის სქემა შესაბამისი განტოლებისათვის.

z ცვლადი წილად-წრფივი

$$z = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$$

გარდაქმნით, სადაც $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, შესაძლებელია განტოლების სამი a_1, a_2 და a_3 განსაკუთრებული წერტილი გადავიდეს სამ, განსხვავებულ τ_1, τ_2 და τ_3 წერტილში, რომლის შესაბამისი რიმანის სქემა იქნება :

$$p\begin{pmatrix} a & b & c & \\ \rho_1^{(1)} & \rho_1^{(2)} & \rho_1^{(3)} & ,z \\ \rho_2^{(1)} & \rho_2^{(2)} & \rho_2^{(3)} & \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \\ \rho_1^{(1)} & \rho_1^{(2)} & \rho_1^{(3)} & ,t \\ \rho_2^{(1)} & \rho_2^{(2)} & \rho_2^{(3)} & \end{pmatrix}$$

აქედან ჩანს, რომ ცვლადი არის t, ხოლო $\tau_1 = \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta}$, $\tau_2 = \frac{\alpha b + \beta}{\gamma b + \delta}$, $\tau_3 = \frac{\alpha c + \beta}{\gamma c + \delta}$.

რადგან წილადწრფივი ასახვით შესაძლებელია ნებისმიერი სამი წერტილი გადავიდეს $0, 1, \infty$ წერტილში, ამიტომ ბუნებრივია (5) განტოლებაში განსაკუთრებულ წერტილებად ავიღოთ ეს წერტილები.

თავი 1

1.1 გაუსის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია

დავუშვათ $a,b,c\in R$ და $c\notin Z_{\le 0}$.

განვსაზღვროთ გაუსის ჰიპერგეომეტრიული ფუქცია შემდეგნაირად:

$$F(a,b,c\,|\,z)=\sum\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n \tag{1.1}$$

$(x)_n$ პოხჰამერის სიმბოლო განსაზღვრულია შემდეგნაირად: $(x)_0=1$ და $(x)_n=x(x+1)\cdots(x+n-1)$. (1.1)-ის კრებადობის რადიუსი არის 1, თუ a ან b არის არადადებითი მთელი რიცხვი, ამ შემთხვევაში გვექნება მრავალწევრი(პოლინომი).

ახლა განვიხილოთ (5)-ში უცნობი $w(z)$ ფუნქციის გარდაქმნა

$$w(z)\to w(z)(z-a)^{\mu_1}(z-b)^{\mu_2}(z-c)^{\mu_3}\,,$$

სადაც $\sum_{j=1}^{3}\mu_j=0$, მაშინ რიმანის განტოლება კვლავ რიმანის განტოლებაში გადავა

($\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j=0$ უზრუნველყოფს იმას, რომ ∞ კვლავ რეგულარულ წერტილად დარჩება), ხოლო შესაბამის რიმანისსქემას ექნება სახე :

$$p\begin{pmatrix} a & b & c & \\ \rho_1^{(1)}+\mu_1 & \rho_1^{(2)}+\mu_2 & \rho_1^{(3)}+\mu_3 & ,z \\ \rho_2^{(1)}+\mu_1 & \rho_2^{(2)}+\mu_2 & \rho_2^{(3)}+\mu_3 & \end{pmatrix}.$$

(1.1) აკმაყოფილებს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$z(D+a)(D+b)F=D(D+c-1)F\,,\ \text{სადაც}\ D=z\frac{d}{dz}\ .$$

დავწეროთ უფრო ზუსტად:

$$z(z-1)F''=((a+b+1)z-c)F'+abF=0\ . \tag{1.2}$$

ეილერის ინტეგრალი

$$F(a,b,c\,|\,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt\ \ (c>b>0)$$

საშუალებასგვაძლევს ავირჩიოთ ისეთი z, რომ $|z|>1$, ხოლო შეზღუდვა $c>b>0$ უზრუნველყოფს ინტეგრალის კრებადობას 0-ში და 1-ში.

ნებისმიერი $b, c-b \notin Z$ -სთვის გვაქვს:

$$F(a,b,c \mid z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{1}{\left(1-e^{2\pi i b}\right)\left(1-e^{2\pi i(c-b)}\right)} \int_\gamma t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(-yz)^{-a}\, dt$$

სადაც γ არის შეკრული წირი.

კუმერმა მოგვცა (1.1)-ის შემდეგი ამონახსნები:

$$\begin{aligned}
&F(a,b,c \mid z)\\
&= (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c \mid z)\\
&= (1-z)^{-a} F(a, c-b, c \mid z/(z-1))\\
&= (1-z)^{-b} F(a-c, b, c \mid z/(z-1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c \mid z)\\
&= z^{1-c}(1-z)^{c-a-b} F(1-a, 1-b, 2-c \mid z)\\
&= z^{1-c}(1-z)^{c-a-1} F(a-c+1, 1-b, 2-c \mid z/(z-1))\\
&= z^{1-c}(1-z)^{c-b-1} F(1-a, b-c+1, 2-c \mid z/(z-1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&F(a, b, a+b-c+1 \mid 1-z)\\
&= z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, a+b-c+1 \mid 1-z)\\
&= z^{-a} F(a, a-c+1, a+b-c+1 \mid 1-1/z)\\
&= z^{-b} F(b-c+1, b, a+b-c+1 \mid 1-1/z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c-a-b+1 \mid 1-z)\\
&= (1-z)^{c-a-b} z^{1-c} F(1-a, 1-b, c-a-b+1 \mid 1-z)\\
&= (1-z)^{c-a-b} z^{a-c} F(1-a, c-a, c-a-b+1 \mid 1-1/z)\\
&= (1-z)^{c-a-b} z^{b-c} F(c-b, 1-b, c-a-b+1 \mid 1-1/z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&z^{-a} F(a, a-c+1, a-b+1 \mid 1/z)\\
&= z^{-a}(1-1/z)^{c-a-b} F(1-b, c-b, a-b+1 \mid 1/z)\\
&= z^{-a}(1-1/z)^{c-a-1} F(a-c+1, 1-b, 2-c \mid 1/(1-z))\\
&= z^{-a}(1-1/z)^{-a} F(a, c-b, a-b+1 \mid 1/(1-z))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&z^{-b}F(b,b-c+1,b-a+1|1/z)\\
&=z^{-b}(1-1/z)^{c-a-b}F(1-a,c-a,b-a+1|1/z)\\
&=z^{-b}(1-1/z)^{c-b-1}F(b-c+1,1-a,2-c|1/(1-z))\\
&=z^{-b}(1-1/z)^{-b}F(b,c-a,b-a+1|1/(1-z))
\end{aligned}
$$

აღნიშნული ექვსი ფუნქცია განსაზღვრულია მაშინ,როდესაც $c, c-a-b, a-b \notin Z$. თუ ამ რიცხვებიდან ერთ-ერთი არის მთელი, მაშინ არსებობს სხვა ლოგარითმის შემცველი ამონახსნი. მაგალითად, როდესაც $c=1, z-1$ ხდება $\log z$, მეორე ამონახსნი 0 წერტილის მიდამოში და

$$
\log(z)F(a,b,1|z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(n!)^2}z^n\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a+k-1}+\frac{1}{b+k-1}-\frac{2}{k}\right)\right].
$$

ნებისმიერ $F(a+k,b+l,c+m|z)$ სახის ფუნქციას, სადაც $k,l,m\in Z$, ვუწოდოთ $F(a,b,c|z)$ ფუნქციის მიკავშირებული ფუნქცია.

საბოლოოდ ჩვენ გვაქვს ექვსი მიკავშირებული ფუნქცია:

$$
F(a\pm1,b,c|z);\quad F(a,b\pm1,c|z);\quad F(a,b,c\pm1|z).
$$

გაუსმა აჩვენა, რომ $F(a,b,c|z)$ და ნებისმიერი ორი მოსაზღვრე ფუნქცია აკმაყოფილებს წრფივ შესაბამისობას კოეფიციენტებით, რომლებიც არიან წრფივი პოლიომები z -ის მიმართ ან მუდმივები. მაგალითად,

$$
(c-a)F(a-1,b,c|z)+(2a-c-az+bz)F(a,b,c|z)+a(z-1)F(a+1,b,c|z)=0\,.
$$

შევნიშნოთ, რომ $F'(a,b,c|z)=(ab/c)F(a+1,b+1,c+1|z)$.

1.2. ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების მონოდრომია

განვიხილოთ სამი შეკრული მარყუჟი g_0, g_1, g_∞, რომლებიციწყებიან დამთავრდებიან z_0 წერტილში, $z_0\in C\setminus\{a,b,c\}$ და აკმაყოფილებენ პირობას $g_0g_1g_\infty=1$. შესაბამისი მონოდრომიის მატრიცები აღვნიშნოთ M_0, M_1 და M_∞-ით, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $M_0M_1M_\infty=I$. M_0 და M_∞ წარმოქმნის ჯგუფს. $0,1,\infty$-ზე ლოკალური ექსპონენტები არიან $0,1-c$, $0,c-a-b$ და a,b შესაბამისად. ხოლო მატრიცების

მახასიათებლები არიან $1, \exp(2\pi i(1-c))$ $1, \exp(2\pi i(c-a-b))$ და $\exp(2\pi ia), \exp(2\pi ib)$ შესაბამისად.

მონოდრომიის ჯგუფი შეიძლება განვიხილოთ როგორც M_o და M_∞-სგან წარმოქმნილი, ხოლო $M_\infty M_0 = M_1^{-1}$ აქვს საკუთრივი მნიშვნელობა 1.

განვიხილოთ რიმანის განტოლების ორი (φ, ψ) დამოუკიდებელი ამონახსნი z_0 რეგულარული წერტილის მიდამოში. ისინი გაგრძელდებიან g_0, g_1, g_∞ წირების გასწვრივ. ანალიზური გაგრძელებით მივიღებთ სხვა $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ ამონახსნს, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობებს :

$$(\varphi, \psi) = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) M_j^{g_j}$$

სადაც $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ არის (φ, ψ)-ს გაგრძელება g_j წირის გასწვრივ, ხოლო $M_j^{g_j} \in GL(z, C)$. ზედა ინდექსი მიუთითებს M_j მატრიცის დამოკიდებულებას g_j წირზე.

<u>ლემა</u>: ვთქვათ, $A, B \in GL(2, C)$. დავუშვათ AB^{-1}-ს ერთ-ერთი აკუთრივი მნიშვნელობა 1-ის ტოლია. მაშინ არსებობს A და B-ს საერთო საკუთრივი ვექტორი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A და B-ს აქვს საერთო საკუთრივი მნიშვნელობა.

<u>დამტკიცება:</u> ვაჩვენოთ, რომ $Ker(A-B)$-ს განზომილება არის მინიმუმ 1. იმ შემთხვევაში, როდესაც განზომილება არის 2, მაშინ გვაქვს $A = B$ და ჩვენი ლემა იქნება ტრივიალური. მაშასადამე, შეიძლება დავუშვათ, რომ $\dim(Ker(A-B)) = 1$.

ვთქვათ $v \in Ker(A-B)$ და $v \neq 0$. ვთქვათ არსებობს A და B-ს საერთო საკუთრივი ვექტორი w, საკუთრივი მნიშვნელობები კი იყოს λA და λB. თუ ეს საკუთრივი მნიშვნელობები ტოლია, მაშინლემის პირობები სრულდება. ვთქვათ ისინი არ არიან ტოლები. ახლა ავიღოთ ისეთი α და β, რომ $Av = \alpha v + \beta v$. მაგრამ რადგან $Av = Bv$, ასევე გვექნება $Bv = \alpha v + \beta v$. აქედან გამომდინარე A და B მატრიცების v და w ბაზისებია

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \lambda_A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \lambda_B \end{pmatrix}$$

ამგვარად მათ აქვთ საერთო საკუთრივი მნიშვნელობა α.

დავუშვათ A და B-ს აქვს საერთო საკუთრივი მნიშვნელობა λ. თუ v არის A-ს საკუთრივი ვექტორი, მაშინ ლემის პირობები სრულდება.

განვიხილოთ ვექტორი $w=(a-\lambda)v$. რადგან $A-\lambda$-ს აქვს არატრივიალური ბირთვი, გვაქვს $\langle w\rangle_c=(A-\lambda)C^2$. კერძოდ $(a-\lambda)w$ არის სკალარული ნამრავლი W-სი ე.ი W არის A-ს საკუთრივი ვექტორი. ამასთან $w=(B-\lambda)v$ და ანალოგიურად W არის B-ს საკუთრივი ვექტორი. მაშასადამე, A და B-ს აქვს საერთო საკუთრივი ვექტორი.

ჰიპერგეომეტრიულ განტოლებას ეწოდება დაყვანადი, თუ მისი მონოდრომიის ჯგუფი დაყვანადია.

ჰიპერგეომეტრიულ განტოლებას ეწოდება აბელური, თუ მისი მონოდრომიის ჯგუფი აბელურია (ანუ კომუტაციურია) .

ტიპიური მაგალითი ჰიპერგეომეტრიული აბელური განტოლებისა არის $z(D+\alpha_1)\cdots(D+\alpha_n)F=(D+\beta_1-1)\cdots(D+\beta_n-1)F$, $D=z\dfrac{d}{dz}$, რომელსაც $a=c=0$-ში აქვს ამონახსნი $1,\ (1-z)^{-(b+1)}$ და $a=b=1, c=2$ -ში აქვს ამონახსნი $1/z, \log(1-z)/z$.

მონოდრომიის ჯგუფის აღსაწერად, ყველაზე მოსახერხებელ გზას წარმოადგენს შვარცის სამკუთხედების გამოყენება.

ვთქვათ z_0 არის წერტილი $H=\{z\in E \mid I(z)>0\}$ ზედა ნახევარ სიბრტყეში და დავუშვათ, რომ f და g არის ორი დამოუკიდებელი ამონახსსნი ჰიპერგეომეტრიული განტოლების z_0-ის მიდამოში. განაყოფი $D(z)=f/g$ განიხილება როგორც ასახვა H-დან P^1-ზე და ეწოდება შვარცის ასახვა.

<u>თეორემა</u>: (შვარცი) ვთქვათ $\lambda=|1-c|, \mu=|c-a-b|, \nu=|a-b|$. დავუშვათ $0\le\lambda,\mu,\nu<1$. მაშინ ასახვა $D(z)=f/g$ არის ურთიერთცალსახა ასახვა $H\cup R$-დან მრუდწირულ სამკუთხედზე, რომლის წვეროებია $D(0)$, $D(1)$, $D(\infty)$ წერტილები, ხოლო შესაბამისი კუთხეებია $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$.

ვთქვათ $a, b, c\in R, c\notin Z_{\le 0}$ და $c>a+b$, მაშინ

$$F(a,b,c\,|\,1)=\frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}.$$

1.3. ეილერ-გაუსის ჰიპერგეომეტრიული განტოლება რიმანის სქემა $0, 1, \infty$-სთვის

ეილერ-გაუსის ჰიპერგეომეტრიულ განტოლებას აქვს სახე:

$$z(1-z)f'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)z)f' - \alpha\beta f = 0$$

შევნიშნოთ, რომ ეს განტოლება არის მეორე რიგის ჩვეულებრივი ფუქსის განტოლება, რომლის განსაკუთრებული წერტილებია $0, 1, \infty$, ხოლო α, β, γ ექსპონენტები. შესაბამის რიმანი სქემას აქვს სახე:

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha, z \\ 1-\gamma & \gamma-(\alpha+\beta) & \beta \end{pmatrix}$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ შესავალში, პირველ სტრიქონში მოცემულია განსკუთრებული წერტილები, ხოლო დანარჩენ ორ სტრიქონში ამ წერტილების შესაბამისი ლოკალური ექსპონენტები.

ეილერ-გაუსის ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციას,როგორც ვიცით, აქვს სახე:

$$F(\alpha,\beta,\gamma \mid z) = {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma \mid z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k\, k!} z^k,$$

სადაც

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1) = \Gamma(\alpha+k)/\Gamma(\alpha)$$

$$(\beta)_k = \beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1) = \Gamma(\beta+k)/\Gamma(\beta)$$

$$(\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1) = \Gamma(\gamma+k)/\Gamma(\gamma)$$

არის პოხჰამერის სიმბოლო.

განვიხილოთ $z=0$ წერტილი და მისი მიდამო.

ჰიპერგეომეტრიული მწკრივი $F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma \mid z)$ არის ჰიპერგეომეტრიული განტოლების ამონახსნი რიმანის სქემით

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha-\gamma+1, z \\ \gamma-1 & \gamma-(\alpha+\beta) & \beta-\gamma+1 \end{pmatrix}$$

ამიტომ, ფუნქცია $z^{1-\gamma}F\left(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma\,|\,z\right)$ არის ჰიპერგეომეტრიული განტოლების ამონახსნი რიმანის სქემით:

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & \gamma-(\alpha+\beta) & \beta \end{pmatrix}$$

რომელიც არის მოცემული ჰიპერგეომეტრიული განტოლების რიმანის სქემა. ეს გვიჩვენებს, რომ მწკრივი

$$z^{1-\gamma}F\left(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,2-\gamma\,|\,z\right)$$

არის თავდაპირველად მოცემული ჰიპერგეომეტრიული განტოლების ამონახსნი $z=0$ წერტილის მიდამოში $(1-\gamma)$ ექსპონენტით.

ანალოგიური მსჯელობაა საჭირო $z=0$ და $z=\infty$ წერტილის მიდამოში.

გვექნება შემდეგი შედეგი:

ჰიპერგეომეტრიული განტოლების ამონახსნთა სივრცეს აქვს ფორმა:

1) $z=0$ წერტილის მიდამოში :

$$F(\alpha,\beta,\gamma\,|\,z)$$

$$z^{1-\gamma}F\left(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma\,|\,z\right)$$

2) $z=1$ წერტილის მიდამოში :

$$F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1\,|\,1-z)$$

$$z^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1\,|\,1-z\right)$$

3) $z=\infty$ წერტილის მიდამოში :

$$(-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1\,|\,1/z\right)$$

$$(-z)^{-\beta}F\left(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1\,|\,1/z\right)$$

დავუშვათ, გვაქვს მეორე რიგის ჰიპერგეომეტრიული განტოლება სამი განსაკუთრებული a, b ,და c წერტილებით, რომლის შესაბამისი რიმანის სქემაა :

$$P\begin{pmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & ,z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}.$$

ჩვენშეგვიძლია ეს a, b და c წერტილები წილადწრფივი ასახვის მეშვეობით გადავიყვანოთ $0, 1, \infty$ წერტილებში. გვექნება შემდეგი სქემა :

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha\,, z \\ 1-\gamma & \gamma-(\alpha+\beta) & \beta \end{pmatrix}$$

დავუშვათ, $\{z_0, z_1, z_\infty\}$ და $\{z_0', z_1', z_\infty'\}$ არის ორი სამეული $C\cup\{\infty\}$-დან.მაშინ არსებობს

$w=T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ სადაც $a,b,c,d\in C\cup\{\infty\}$, $ad-bc\neq 0$, ისეთი, რომ

$$T(z_0)=z_0' \ ,\ T(z_1)=z_1' \ ,\ T(z_\infty)=z_\infty'$$

ნებისმიერი $\{z_0', z_1', z_\infty'\}$-სთვის ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ

$$T(z_0)=0 \ ,\ T(z_1)=1 \ ,\ T(z_\infty)=\infty$$

ამასთან

$$T'(z_0')=0 \ ,\ T'(z_1')=1 \ ,\ T'(z_\infty')=\infty$$

თუ არცერთი $\{z_0, z_1, z_\infty\}$ არ არის ∞ ,მაშინ

$$T(z)=\frac{z-z_0}{z_1-z_\infty}\,\frac{z_1-z_\infty}{z_1-z_0}\ .$$

თუ $z_0=\infty$,მაშინ

$$T(z)=\frac{z_1-z_0}{z-z_\infty}\ .$$

ვაჩვენოთ რომ ეს ასახვა არის ერთადერთი. ვთქვათ T და T' აკმაყოფილებს ზომოთ მოცემულ პირობას. მაშინ $(T')^{-1}\circ T$ და $S=T_0\circ(T')^{-1}\circ T\circ T_0^{-1}$ აფიქსირებს $\{0,1,\infty\}$ -ს. ამგვარად, $b=c=0$ და $\dfrac{a}{d}=1$. ამასთან $S=Id$, რადგან $(T')^{-1}\circ T=Id$. გამოდის, რომ $T'=T$,ანუ ასახვა ერთადერთია.

განვიხილოთ რამოდენიმე შემთხვევა. გვაქვს ტოლობები :

$$\omega(z)=P\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma\,, z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix}=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha+\beta+\gamma\,, \dfrac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)} \\ \alpha'-\alpha & \beta'-\beta & \alpha+\beta'+\gamma \end{pmatrix}$$

$$\omega(z)=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}{}_2F_1\left(\alpha+\beta+\gamma,\alpha+\beta'+\gamma,1+\alpha+\alpha'\,|\,\frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}\right)$$

.

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha, z \\ 1-\gamma & \gamma-(\alpha+\beta) & \beta \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha, 1-z \\ \gamma-\alpha-\beta & 1-\gamma & \beta \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \beta & \gamma-(\alpha+\beta) & \alpha-\gamma+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha} P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ \beta-\alpha & \gamma-(\alpha+\beta) & \alpha-\gamma+1 \end{pmatrix}$$

$$(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma} P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha, z \\ 1-\gamma & \gamma-(\alpha+\beta) & \beta \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & \alpha+\beta-\gamma & \gamma-\beta, z \\ 1-\gamma & 0 & \gamma-\alpha \end{pmatrix};$$

თავი 2

2.1. შვარც-კრისტოფერის ფორმულა

ვთქვათ D არის მრავალკუთხედი ω სიბრტყეში. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც აღნიშნული მრავალკუთხედი არის n-კუთხედი. მისი შიდა კუთხეები აღვნიშნოთ $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \cdots, \pi\alpha_n$, ხოლო გარე კუთხეები იყოს $\pi\mu_1, \pi\mu_2, \cdots, \pi\mu_n$, რომლებიც მოცემულია შემდეგნაირად: $\pi\alpha_\nu + \pi\mu_\nu = \pi$, $\nu = 1, \cdots, n$. თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ მრავალკუთხედის გარე კუთხეების ჯამი არის 2π, მაშინ გვექნება:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu = 2 \tag{1.1}$$

დავუშვათ $\omega = f(z)$ არის ისეთი ანალიზური ფუნქცია, რომელიც z ღერძზე მდებარე წერტილებს ასახავს ზედა ნახევარსიბრტყეში მდებარე D მრავალკუთხედში. ვთქვათ $a_1, \cdots, a_n$ წერტილები z სიბრტყეში შეესაბამება მრავალკუთხედის წვეროებს, რომლის გარე კუთხეებია $\pi\mu_1, \cdots, \pi\mu_n$.

განვსაზღვროთ ახალი $f_1(z)$ ფუნქცია და გამოვსახოთ იგი $f(z)$ ფუნქციის საშუალებით შემდეგნაირად:

$$f_1(z) = Af(z) + B \tag{1.1'}$$

სადაც A და B მუდმივებია. აქვე შევნიშნოთ, რომ $f_1(z)$ ფუნქციისათვის $a_1, \cdots, a_n$ წერტილები განსაკუთრებული წერტილებია.

$(1.1')$-დან მივიღებთ:

$$\frac{f_1''(z)}{f_1'(z)} = \frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

ეს გვიჩვენებს,რომ

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} \tag{1.2}$$

ფუნქცია უბრუნდება თავის პირვანდელ მნიშვნელობას, როდესაც z უბრუნდება თავის საწყის მდგომარეობას ნამდვილი ღერძის მიმართ ორი მობრუნების საშუალებით. ამგვარადგანსაზღვრული $g(z)$ ფუნქცია არის ცალსახა მთელ z სიბრტყეზე. ამასთან, $g(z)$

სინგულარულია მხოლოდ $a_1,\cdots,a_n$ წერტილებში. იმისთვის, რომ დადგინდეს ამ სინგულარობის ხასიათი, ჩვენ უნდა გავიგოთ $f(z)$-ის ყოფაქცევა a_ν წერტილის მიდამოში.

ვიგულისხმოთ, რომ არცერთი $a_1,\cdots,a_n$ წერტილი არ ემთხვევა $z=\infty$ წერტილს.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$h(z)=\left[f(z)-f(a_\nu)\right]^{1/\alpha_\nu} \tag{1.3}$$

$z=a_\nu$ წერტილის მიდაამოში. რადგან $\pi\alpha_\nu+\pi\mu_\nu=\pi\Rightarrow\alpha_\nu=1-\mu_\nu$, ამიტომ (1.3)-დან გამოდის, რომ

$$h(z)=\left[f(z)-f(a_\nu)\right]^{1/1-\mu_\nu}\Rightarrow\left[h(z)\right]^{1-\mu_\nu}=f(z)-f(a_\nu)\Rightarrow f(z)=f(a_\nu)+\left[h(z)\right]^{1-\mu_\nu}.$$

სადაც $h(z)$ არის რეგულარული, როცა $z=a_\nu$. ამასთან განსაკუთრებული წერტილის იზოლირებულობიდან გამომდინარე $h(a_\nu)=0$ და $h'(a_\nu)\neq 0$.მაშინ $h(z)$შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით: $h(z)=(z-a_\nu)h_1(z)$, სადაც $h_1(z)$ არის რეგულარული $z=a_\nu$-ში და ამასთან $h_1(a_\nu)\neq 0$.ამის გათვალისწინებით გვექნება:

$$f(z)=f(a_\nu)+(z-a_\nu)^{1-\mu_\nu}\left[h_1(z)\right]^{1-\mu_\nu}$$

აქედან გამოდის, რომ

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}=-\frac{\mu_\nu}{(z-a_\nu)}+k(z)$$

სადაც $k(z)$ არის რეგულარული $z=a_\nu$-ში და $h_1(a_\nu)\neq 0$.ეს ნიშნავს, რომ

$$g(z)+\frac{\mu_\nu}{z-a_\nu}$$

არის რეგულარული $z=a_\nu$ წერტილში. იგივე პროცედურის ჩატარებით, ყველა $a_1,\cdots,a_n$ წერტილისთვის მივიღებთ, რომ

$$g_1(z)=g(z)+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\mu_\nu}{z-a_\nu} \tag{1.4}$$

ფუნქცია არის რეგულარული ყველა $a_1,\cdots,a_n$ წერტილში. მაგრამ, ისინი არიან მხოლოდ სინგულარული წერტილები $g(z)$ ცალსახა ფუნქციის. მაშასადამე, $g(z)$ არის რეგულარული და ცალსახა მთელ სიბრტყეზე. ლიუვილის თეორემის თანახმად, მთლიან

კომპლექსურ სიბრტყეზე შემოსაზღვრული, ცალსახა, ანალიზური ფუნქცია შეიძლება იყოს მხოლოდ მუდმივი. მეტიც, ეს მუდმივი უნდა იყოს ნული. მართლაც, $z=\infty$-ში გვაქვს გაშლა $f(z)=f(\infty)+c_1z^{-1}+c_2z^{-2}+\cdots$. დიფერენცირებით ვიპოვით, რომ $f'(z)$-ს აქვს ორჯერადი ნული $z=\infty$-ში, მაშინ, როცა $f''(z)$ -ს აქვს სამჯერადი ნული. მაშასადამე, (1.2)-დან გამომდინარე $g(z)$ მიისწრაფის ნულისკენ $z=\infty$-ში. რადგან $(z-a_\nu)$ ასევე მიისწრაფის ნულისკენ, (1.4)-დან ვასკვნით, რომ $g_1(z)=\infty$ ე.ი. $g_1(z)$ არის მუდმივი და შესაბამისად არის ნული ყველგან. (1.2)-ის და (1.4)-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}=-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\mu_\nu}{z-a_\nu} \quad .$$

ამ გამოსახულების ინტეგრებით საბოლოოდ გვექნება:

$$f(z)=\alpha\int_0^z\frac{dz}{(z-a_1)^{\mu_1}(z-a_2)^{\mu_2}\cdots(z-a_n)^{\mu_n}}+\beta \qquad (1.5)$$

სადაც α და β ინტეგრების შედეგად მიღებული მუდმივებია. ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ არცერთი a_ν წერტილი არ ემთხვევა უსასრულობას. თუ გარდავსახავთ a_ν წერტილს უსასრულოზე $z=a_n-(1/\zeta)$ წრფივი გარდაქმნით, მივიღებთ:

$$f(\zeta)=\alpha\int_0^z\left((a_n-a_1-1/\zeta)\right)^{-\mu_1}\cdots(a_n-a_{n-1}-1/\zeta)^{\mu_{n-1}}\left(-\frac{1}{\zeta}\right)^{-\mu_n}\frac{d\zeta}{\zeta^2}+\beta_1$$

საიდანაც (1.1)-ის ძალით გვექნება:

$$f(z)=\alpha_1\int_0^z\frac{dz}{(z-a_1')^{\mu_1}\cdots(z-a_{n-1}')^{\mu_{n-1}}}+\beta_1 \qquad (1.6)$$

სადაც $a_1',\cdots,a_{n-1}'$ არიან მუდმივები.

$$z=i\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)\ ; \quad \zeta=\frac{z-i}{z+i}$$

წრფივი გარდაქმნით გვექნება

$$(z-a_\nu)^{\mu_\nu}=\left[i\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)-a_\nu\right]^{\mu_\nu}=\left(\frac{a_\nu+i}{1-\zeta}\right)^{\mu_\nu}\left(\zeta-\frac{a_\nu-i}{a_\nu+i}\right)^{\mu_\nu}$$

და

$$dz = \frac{2idz}{(1-\zeta)^2}$$

თუ აღვნიშნავთ

$$b_\nu = \frac{a_\nu - i}{a_\nu + i}$$

წერტილს ერთეულოვან წრეზე, მაშინ (1.1) და (1.5)-დან გამოდის რომ

$$f(z) = \alpha_2 \int_0^z \frac{dz}{(b_1 - z)^{\mu_1} \cdots (b_n - z)^{\mu_n}} + \beta_2 \tag{1.7}$$

სადაც α_2 და β_2 მუდმივებია.

თუ $\pi\alpha_\nu$ კუთხეებს შევცვლით $2\pi - \pi\alpha_\nu = \pi(2-\alpha_\nu)$, მაშინ $\mu_\nu = 1-\alpha_\nu$ უნდა შეიცვალოს $1-(2-\alpha_\nu) = -(1-\alpha_\nu) = -\mu_\nu$. (1.4)-ის ანალოგიურად, ფუნქცია

$$g_2(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\mu_\nu}{z - a_\nu} \tag{1.8}$$

იქნება რეგულარული $a_1, \cdots, a_n$ წერტილებში. მიუხედავად იმისა, რომ კონფორმული ასახვა ახლა შეიცავს წერტილს უსასრულობაში, ჩვენ არ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $g_2(z)$ მუდმივია. ვთქვათ გვაქვს შემთხვევა $f(0) = \infty$. აქედან გამომდინარე უნდა შევისწავლოთ $\frac{f''(z)}{f'(z)}$ ფუნქციის ყოფაქცევა $z = 0$-ში. რადგან ასახვა $\omega = f(z)$ არის კომფორმული $z = 0$-ში, $f(z)$ -სთვის იგი იქნება მარტივი პოლუსი. აქედან გამომდინარე, $f(z)$-ს უნდა ჰქონდეს სახე :

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{z}$$

სადაც $f_1(z)$ არის რეგულარული $z = 0$-ში და $f_1(0) = 0$. მივიღებთ, რომ

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{2}{z} + \frac{zf_1''(z)}{zf_1'(z) - f_1(z)} \ .$$

ეს გვიჩვენებს, რომ

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} + \frac{2}{z}$$

არის რეგულარული $z = 0$-ში და მიისწრაფის ნულისკენ. (1.8)-დან მიიღება გამოსახულება

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\mu_\nu}{z-a_\nu}+\frac{2}{z}-\lambda\ ,\quad \lambda=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\mu_\nu}{a_\nu}$$

რომელიც არის რეგულარული და ცალსახა სიბრტყის ყველა წერტილში და იღებს 0-ის ტოლ მნიშვნელობას $z=0$-ში. მაშასადამე, დაიყვანება მუდმივ ნულამდე. ამგვარად

$$f(z)=\alpha\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\mu_1}\cdots(z-a_n)^{\mu_n}\,\frac{dz}{z^2}\,,\quad z_0\neq 0\ .$$

(1.5), (1.6), (1.7) და (1.9) ფორმულები ცნობილია შვარც-კრისტოფელის ფორმულების სახელწოდებით .

2.2. წრიული მრუდებით შემოსაზრვრული არე

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ისეთი არეების კონფორმულ ასახვას, რომლებიც შემოსაზღვრულია სასრული რაოდენობა წრიული მრუდებით. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ასახვის განმახორციეებელი $\omega=f(z)$ ფუნქცია. წინა პარაგრაფში, იგივე ამოცანისათვის გადამწყვეტ როლს ასრულებდა დიფერენციალური ω''/ω' ოპერატორის შემოტანა, რომელიც არ შეიცვლება, თუ ω-ს შევცვლით $(a+b)$-თი, სადაც a და b ნებისმიერი მუდმივებია.

უნდა ვაჩვენოთ, რომ დიფერენციალური ოპერატორს

$$\{\omega,z\}=\left(\frac{\omega''}{\omega'}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega''}{\omega'}\right)^2;\qquad \omega'=\frac{d\omega}{dz}\tag{2.1}$$

რომელიც ცნობილია შვარცის დიფერეცნიალური ოპერატორის (შვარცის წარმოებულის) სახელით, აქვს ზუსტად ეს თვისება.

ჩანაწერი (2.1) გვიჩვენებს, რომ

$$\{W,z\}=\{\omega,z\}\quad;\quad W=\frac{az+b}{cz+d}\quad;\quad ad-bc\neq o\tag{2.2}$$

სადაც a,b,c,d მუდმივებია.

გვექნება:

$$W'=\frac{ad-bc}{(c\omega+d)^2}\,\omega'\quad;$$

საიდანაც დიფერენციებით მივიღებთ :

$$\frac{W''}{W'}=\frac{\omega''}{\omega'}-\frac{2c\omega}{c\omega+d}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\left(\frac{W''}{W'}\right)'=\left(\frac{\omega''}{\omega'}\right)'+\frac{2c^2\omega'^2}{(c\omega+d)^2}-\frac{2c\omega''}{c\omega+d}$$

და

$$\left(\frac{W''}{W'}\right)^2=\left(\frac{\omega''}{\omega'}\right)^2+\frac{4c^2\omega'^2}{(c\omega+d)^2}-\frac{4c\omega''}{c\omega+d}$$

ამიტომ

$$\left(\frac{W''}{W'}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{W''}{W'}\right)^2=\left(\frac{\omega''}{\omega'}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega''}{\omega'}\right)^2.$$

პირველ რიგში, $\omega=f(z)$ უნდა იყოს რეგულარული ყველა წერტილში, გარდა სასრული რაოდენობა $a_1,\cdots,a_n$ წერტილებისა, რომლებიც შეესაბამება მრავალკუთხედის წვეროებს. ამ წერტილებში $\omega=f(z)$ ფუქციის შვარცის წარმოებული უნდა იყოს სინგულარული. $\{\omega,z\}$-ის სინგულარობის შესწავლის მიზნით, ჩვენ ვიყენებთ წრფივ გარდაქმნას.

როგორც წინა პარაგრაფში ვნახეთ, $f(z)$ ფუნქცია შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით :

$$f(z)=(z-a_\nu)^{\alpha_\nu}f_1(z)\quad,$$

სადაც $f_1(z)$ არის რეგულარული $z=a_\nu$-ში, ამასთან $f_1(a_\nu)\neq 0$ და $f_1(a_\nu)$ არის ნამდვილიი, როცა z არის ნამდვილი. ამის გათვალისწინებით, ელემენტარული გარდაქმნებით მივიღებთ :

$$\{\omega,z\}=\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\alpha_\nu^2}{(z-a_\nu)^2}+\frac{\beta_\nu}{z-a_\nu}+f_2(z)\quad,$$

სადაც $f_2(z)$ არის რეგულარული $z=a_\nu$-ში და

$$\beta_\nu=\frac{1-\alpha_\nu^2}{\alpha_\nu}\cdot\frac{f_1'(a_\nu)}{f_1(a_\nu)}$$

არის ნამდვილი. იგივე პროცედურის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$\{\omega,z\}-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1-\alpha_\nu^2}{\left(z-a_\nu^2\right)}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\beta_\nu}{z-a_\nu}$$

არის რეგულარული $a_1,\cdots,a_n$ წერტილებში და ამასთან ეს გამოსახულება არის ნამდვილი მთელ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე. როგორც ზემოთ ვნახეთ, $\{\omega, z\}$ ნამდვილია მაშინ, როცა z არის ნამდვილი და $(z-a_\nu)^{-1}$ და $(z-a_\nu)^{-2}$ პირობები გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ მუდმივები α_ν, β_ν, a_ν არიან ნამდვილები. აქედან, $\omega = f(z)$ ფუნქცია მრუდწირულ მრავალკუთხედზე $\pi\alpha_1,\cdots,\pi\alpha_n$ კუთხეებით, აკმაყოფილებს განტოლებას :

$$\{\omega, z\} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1-\alpha_\nu^2}{(z-a_\nu)^2} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\beta_\nu}{z-a_\nu} + \gamma, \tag{2.3}$$

სადაც $\beta_1,\cdots,\beta_n$ და γ არიან ნამდვილი მუდმივები, ამასთან ისინი ერთმანეთისგან სრულიად დამოუკიდებლები არიან. თუ $a_1,\cdots,a_n$ წერტილებიდან არცერთი არ ემთხვევა უსასრულობას, მაშინ $\omega = f(z)$ არის რეგულარული $z=\infty$-ში. აქედან გამომდინარე გვაქვს f -ის წარმოდგენა მწკრივად

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots$$

რომელიც კრებადია $z=\infty$-ში. ამის (2.1)-ში ჩასმით, ჩვენ ვპოულობთ, რომ $\{\omega, z\}$-ის გაშლა $z=\infty$-სთან მცირე მიდამოში იწყება z^{-4} -დან. მაშინ (2.3)-ის მარჯვენა მხარის შესაბამისი გაშლა იქნება

$$\gamma + \frac{1}{z}\sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu + \frac{1}{z^2}\sum_{\nu=1}^{n}\left[a_\nu\beta_\nu + \frac{1}{2}\left(1-\alpha_\nu^2\right)\right] + \frac{1}{z^3}\sum_{\nu=1}^{n}\left[\beta_\nu a_\nu^2 + a_\nu\left(1-\alpha_\nu^2\right)\right] + \cdots$$

რომელიც უნდა აკმაყოფილებდეს პირობებს:

$$\gamma = 0\ ;\ \sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu = 0\ ;\ \sum_{\nu=1}^{n}\left[2a_\nu\beta_\nu + 1 - \alpha_\nu^2\right] = 0\ ;\ \sum_{\nu=1}^{n}\left[\beta_\nu a_\nu^2 + a_\nu\left(1-\alpha_\nu^2\right)\right] = 0; \tag{2.4}$$

(2.4)-ის პირველი ორი პირობა სამართლიანია, თუ მრავალკუთხედის ერთ-ერთი წვერო შეესაბამება $z=\infty$- ს და ამ შემთხევევაში $\{\omega, z\}$-ის გაშლა $z=\infty$-ის მცირე მიდამოში იწყება წევრით $\frac{1}{2}\left(1-\alpha^2\right)z^{-2}$, თუ $\pi\alpha$ არის შესაბამისი მრავალკუთხედის კუთხე.

განვიხილოთ სამკუთხედის შემთხვევა :

დავუშვათ, $\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = \beta,\ \alpha_3 = \gamma,\ a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_3 = c$, მაშინ (2.3) და (2.4)-ის ძალით

$$\{\omega, z\} = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\left[\frac{1-\alpha^2}{2}\cdot\frac{(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{1-\beta^2}{2}\cdot\frac{(b-a)(b-c)}{z-b} + \frac{1-\gamma^2}{2}\cdot\frac{(c-a)(c-b)}{z-c}\right] \quad (2.5)$$

ეს გამოსახულება შეიძლება გამარტივდეს a, b და c წერტილების გაიგივებით შესაბამისად $z=0$, $z=\infty$, $z=1$ წერტილებთან. თუ დავუშვებთ (2.5)-ში, რომ $b\to\infty$, მაშინ

$$\frac{a-b}{z-b}, \quad \frac{(b-a)(b-c)}{(z-b)^2}, \quad \frac{c-b}{z-b}$$

გამოსახულებები, როგორც წესი, 1-ის ტოლია და მივიღებთ:

$$\{\omega, z\} = \frac{1}{(z-a)(z-c)}\left[\frac{1-\alpha^2}{2}\cdot\frac{a-c}{z-a} + \frac{1-\beta^2}{2} + \frac{1-\gamma^2}{2}\cdot\frac{c-a}{z-c}\right]$$

აქადან გამომდინარე, $a=0$ და $c=1$-სთვის გვექნება:

$$\{\omega, z\} = \frac{1}{z(z-1)}\cdot\left[-\frac{1-\alpha^2}{2z} + \frac{1-\beta^2}{2} + \frac{1-\gamma^2}{2(z-1)}\right]$$

რომელიც შეიძლება ასევე ჩაიწეროს ფორმით:

$$\{\omega, z\} = \frac{1-\alpha^2}{2z^2} + \frac{1-\gamma^2}{2(z-1)^2} + \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-1}{2z(z-1)} \quad (2.6).$$

მანამდე, სანამ (2.6)-ის განხილვას დავიწყებდეთ, უნდა შევისწავლოთ (2.3) უფრო დეტალურად. თუ ω არის (2.3)-ის ამონახსნი, მაშინ W ფუნქციაგანისაზღვრება (2.2)-ით, რომელიც მოიცავს სამ ნებისმიერ მუდმივს (ისეთს, რომ a, b, c მუდმივებიდან ერთი შეიძლება ავიღოთ 1-ის ტოლი).

თუ u_1 და u_2 არის $u''(z)+p(z)u(z)=0$ დიფერენციალური განტოლების ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, მაშინ

$$\omega(z) = \frac{u_1(z)}{u_2(z)}$$

არის

$$\{\omega, z\} = 2p(z) \quad (2.7)$$

განტოლების ამონახსნი

თუ $u_1'' + pu_1 = 0$ განტოლებაში u_1-ს შევცვლით $u_2\omega$-ით, მაშინ მივიღებთ :

$$u_2\omega'' + 2u_2'\omega' + \omega(u_2'' + pu_2) = 0$$

და ამიტომ $u_2'' + pu_2 = 0$, $u_2\omega'' + 2u\omega' = 0$.

ამრიგად,

$$\frac{\omega''}{\omega'} = -\frac{u_2'}{u_2}$$

და შესაბამისად გვაქვს ტოლობა :

$$\left(\frac{\omega''}{\omega'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega''}{\omega'}\right)^2 = -2\left(\frac{u_2'}{u_2}\right)' - 2\left(\frac{u_2'}{u_2}\right)^2 = -\frac{2u_2''}{u_2}$$

აქედან $u_2'' + pu_2 = 0$ და (2.1) არის (2.7)-ის ექვივალენტური.

(2.7)-ის გაერთიანებით (2.3)-თან და (2.4)-თან მივიღებთ შემდეგ შედეგს.

<u>თეორემა</u>: თუ $\omega = f(z)$ ფუნქცია ზედა ნახევარსიბრტყეს ასახავს მრუდწირულ მრავალკუთხედში, ამასთან $z = a_\nu$ წერტილებს ნამდვილ რიცხვთა ღერძიდან f შეუსაბამებს მრუდწირული მრავალკუთხედის $f(a_\nu)$ წვეროებს $\pi\alpha_\nu$ კუთხეებით, მაშინ

$$\omega = f(z) = \frac{u_1(z)}{u_2(z)} \qquad (2.8)$$

სადაც $u_1(z)$ და $u_2(z)$ არის

$$u''(z) + \left[\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1-\alpha_\nu^2}{(z-a_\nu)^2} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\beta_\nu}{z-a_\nu}\right]u(z) = 0 \qquad (2.9)$$

წრფივი დიფერენციალური გატოლების ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი და ნამდვილი β_ν მუდმივები აკმაყოფილებენ ტოლობებს :

$$\sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu = 0; \quad \sum_{\nu=1}^{n}\left(2a_\nu\beta_\nu + 1 - \alpha_\nu^2\right) = 0; \quad \sum_{\nu=1}^{n}\left[\beta_\nu a_\nu^2 + a_\nu\left(1-\alpha_\nu^2\right)\right] = 0 \qquad (2.10)$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $n = 3$.

თუ $\pi\alpha$, $\pi\beta$ და $\pi\gamma$ არის სამკუთხედის კუთხეები და $z = 0, \infty, 1$ თეორემაში მოყვანილი შესაბამისი წერტილებია, მაშინ (2.6)-ის ძალით დიფერენციალური განტოლება (2.9) მიიღებს სახეს :

$$u'' + \frac{1}{4}\left[\frac{1-\alpha^2}{z^2} + \frac{1-\gamma^2}{(z-1)^2} + \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-1}{z(z-1)}\right]u = 0 \qquad (2.11)$$

რადგან ჩვენ არ გვაინტერესებს (2.8)-ის კერძო ამონახსნები, ამიტომ (2.11) შეიძლება შევცვალოთ შემდეგი ტიპის დიფერენციალური განტოლებით:

$$y'' + P(z)y' + Q(z)y = 0 \qquad (2.12)$$

რომლის ამონახსნები დაკავშირებულია (2.11)-ის ამონახსნებთან, შესაბამისობით :

$$y(z) = \sigma(z)u(z) \qquad (2.13)$$

სადაც $\sigma(z)$ არის მოცემული ფუნქცია. თუ $y_1(z)$ და $y_2(z)$ არის (2.12)-ის ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, მაშინ გვექნება:

$$\frac{y_1(z)}{y_2(z)} = \frac{u_1(z)}{u_2(z)} ,$$

სადაც u_1 და u_2 არის(2.11)-ის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი. (2.13)-ში ავიღოთ $\sigma(z)$ ფუნქცია შემდეგი სახით :

$$\sigma(z) = e^{-\frac{1}{2}\int_o^z P(z)dz} ,$$

ელემენტარული გარდაქმნებით (2.12) მიიყვანება

$$u'' + \left[Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}P'\right]u = 0$$

განტოლებაზე. $u = u(z)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (2.13)-ში. (2.11)-თან შედარება გვიჩვენებს, რომ(2.11) და (2.12) ექვივალენტურია, თუ სრულდება შემდეგი:

$$Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}P' = \frac{1}{4}\left[\frac{1-\alpha^2}{z^2} + \frac{1-\gamma^2}{(z-1)^2} + \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - 1}{z(z-1)}\right] \qquad (2.14)$$

სადაც

$$P(z) = \frac{c - (a+b+1)z}{z(1-z)} \ , \ Q(z) = -\frac{ab}{z(1-z)} ,$$

სადაცმუდმივები განსაზღვრულია შემდეგი წესით:

$$a = \frac{1}{2}(1 + \beta - \alpha - \gamma) \ , \quad b = \frac{1}{2}(1 - \alpha - \beta - \gamma) \ , \quad c = 1 - \alpha \qquad (2.15)$$

აქედან გამომდინარე, $P(z)$ და $Q(z)$$(2.12)$-ში შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი ფორმით:

$$z(1-z)y'' + [c - (a+b+1)z]y' - aby = 0 \qquad (2.16)$$

ეს დიფერენციალური განტოლება ცნობილია როგორც ჰიპერგეომეტრიული განტოლება. $\omega = f(z)$ფუნქციას აქვს სახე :

$$f(z) = \frac{y_1(z)}{y_2(z)}$$

სადაც $y_1(z)$და $y_2(z)$არის (2.16) ჰიპერგეომეტრიული განტოლების ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი და a, b, c მუდმივები განისაზღვრება (2.15)-ით.

(2.16) განტოლების ამონახსნები მოიცემიან ჰიპერგეომეტრიული მწკრივებით :

$$F(a,b,c,z)=1+\frac{ab}{c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!}z^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)3!}z^3+\cdots \ |z|<1 \quad (2.17)$$

$F(a,b,c,z)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ ასევე განსაზღვრული ინტეგრალის სახით :

$$F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt \tag{2.18}$$

სადაც პირობები $b>0$ და $c>b$ აუცილებელია ინტეგრალის არსებობისთვის.

(2.16)-დან გვექნება :

$$z(1-z)y''+[a+b-c+1-(a+b+1)z]y'-aby=0$$

რომელიც არის კიდევ ერთი ჰიპერგეომეტრიული განტოლება. ამ განტოლების პარამეტრებია $a_1=a$, $b_1=b$, $c_1=a+b-c+1$. (2.18) გვიჩვენებს, რომ ეს განტოლება მოიცემა შემდეგნაირად :

$$y=\int_=^1 t^{b-1}(1-t)^{a-c}(1-zt)^{-a}\,dt \tag{2.19}$$

სადაც პირობები $b>0$ და $a>c-1$ აუცილებელია ინტეგრალის არსებობისთვის.
ეს პირობები იდენტურია პირობების $\alpha+\beta+\gamma<1$, $\gamma-\beta-\alpha<1$ და ორივე სრულდება, თუ კუთხეების ჯამი არის ნაკლები π -ზე.

$$\omega=f(z)=\frac{\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}(1+\alpha+\beta+\gamma)}(1-t)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha-\beta-\gamma)}(1-zt)^{-\frac{1}{2}(1-\alpha+\beta-\gamma)}dt}{\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}(1+\alpha+\beta+\gamma)}(1-t)^{-\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta+\gamma)}(1-t+zt)^{-\frac{1}{2}(1-\alpha+\beta-\gamma)}dt} \tag{2.20}$$

ფუნქციაასახავს ზედა ნახევარ სიბრტყეს, მრუდწირულ სამკუთხედზე $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi\gamma$ კუთხეებით, რომელთა ჯამი ნაკლებია π -ზე.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $n=4$.

მეორე რიგის ფუქსის ტიპის განტოლება ოთხი განსაკუთრებული $0,\ 1,\ t,\infty$ წერტილით

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\in}{z-t}\right)\frac{dy}{dz}+\frac{\alpha\beta z-q}{z(z-1)(z-t)}y=0$$

არის ჰოინის განტოლება, სადაც $\gamma+\delta+\in=\alpha+\beta+1$. 0, 1, t,∞ წერტილების შესაბამისი ექსპონენტებია 0 , $1-\gamma$; 0 , $1-\delta$; 0 , $1-\in$; α , β . მაშინ რიმანის სქემა იქნება:

$$p\begin{pmatrix} 0 & 1 & t & \infty \\ 0 & 0 & 0 & \alpha, z \\ 1-\gamma & 1-\delta & 1-\in & \beta \end{pmatrix}.$$

განვიხილოთ 2×2 წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\frac{dY}{dz}=A(z)Y\ ,$$

რომელიც არის ფუქსის განტოლებათა სისტემა, რომლის სინგულარული წერტილები არის რეგულარული და

$$A(z)=\frac{A_0}{z}+\frac{A_1}{z-1}+\frac{A_t}{z-t}=\begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z)\end{pmatrix};\quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix} \tag{2.21}$$

$t\neq0$, $t\neq1$, A_0, A_1, A_t არის 2×2 მატრიცა

$$A_i=\begin{pmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)}\end{pmatrix},\quad i=0,1,t$$

$$A_\infty=-(A_0+A_1+A_t)=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2\end{pmatrix} \tag{2.22}$$

ვთქვათ θ_0, θ_1 და θ_t არის A_0, A_1 და A_t -ს საკუთრივი მნიშვნელობები,მაშინ :

$$A_0=\begin{pmatrix} u_0+\theta_0 & -\omega_0 \\ u_0(u_0+\theta_0)/\omega_0 & -u_0\end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix} u_1+\theta_1 & -\omega_1 \\ u_1(u_1+\theta_1)/\omega_1 & -u_1\end{pmatrix},\quad A_t=\begin{pmatrix} u_t+\theta_t & -\omega_t \\ u_t(u_t+\theta_t)/\omega_t & -u_t\end{pmatrix}$$

ხოლო (2.22)-სთვის გვექნება $\theta_0+\theta_1+\theta_t+k_1+k_2=0$. ავიღოთ $\theta_\infty=k_1-k_2$, მაშინ გვექნება $k_1=(\theta_\infty-\theta_0-\theta_1-\theta_t)/2$ v , $k_2=(\theta_\infty+\theta_0+\theta_1+\theta_t)/2$.

$u_0, u_1, u_t, \omega_0, \omega_1, \omega_t$ განისაზღვრება შემდეგნაირად :

$$\omega_0=\frac{k\lambda}{t},\quad \omega_1=-\frac{k(\lambda-1)}{t-1},\quad \omega_t=\frac{k(\lambda-t)}{t(t-1)};$$

$$u_0=-\theta_0+\frac{\lambda}{t\theta_\infty}\left[\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2+\{2k_1(\lambda-1)(\lambda-t)-\theta_1(\lambda-t)-t\theta_t(\lambda-1)\}\mu+k_1\{k_1(\lambda-t-1)-\theta_1-t\theta_t\}\right],$$

$$u_1 = -\theta_1 - \frac{\lambda-1}{(t-1)\theta_\infty}\left[\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2 + \{2k_1(\lambda-1)(\lambda-t) + (\theta_\infty - \theta_1)(\lambda-t) - t\theta_t(\lambda-1)\}\mu + \right.$$
$$\left. + k_1\{k_1(\lambda-t+1) + \theta_0 - (t-1)\theta_t\}\right]$$

$$u_t = -\theta_t + \frac{\lambda-t}{t(t-1)\theta_\infty}\left[\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2 + \{2k_1(\lambda-1)(\lambda-t) - \theta_1(\lambda-t) + t(\theta_\infty - \theta_t)(\lambda-1)\}\mu + \right.$$
$$\left. + k_1\{k_1(\lambda-t+1) + \theta_0 - (t-1)(\theta_\infty - \theta_t)\}\right]$$

სადაც $\lambda \neq 0,1,t,\infty$ და $\mu = (u_0+\theta_0)/\lambda + (u_1+\theta_1)/(\lambda-1) + (u_t+\theta_t)/(\lambda-t)$.

2.3. შვარც-კრისტოფელის ასახვა ოთხი წერტილისთვის

დავუშვათ $Q(\Omega; a,b,c,d)$ არის ოთხკუთხედი.ვთქვათ ფუნქცია $w = f(z)$, სადაც $w = u + iv$, არის ურთიერთცალსახა კონფორმული ასახვა Ω არისა მართკუთხედზე, $0 < u < 1$, $0 < v < M$, ისეთი, რომ წვეროები a,b,c და d შეესაბამება წვეროებს $0,\ 1,\ 1+iM, iM$ შესაბამისად. M-ს (M რიცხვს) ეწოდება $Q(\Omega; a,b,c,d)$ ოთხკუთხედის კონფორმული მოდული და აღინიშნება $M(Q; a,b,c,d)$ სიმბილოთი.

განვიხილოთ შემდეგი ლაპლასის განტოლება დირიხლე-ნეიმანის სასაზღვრო პირობებით $Q(\Omega; a,b,c,d)$ ოთხკუთხედზე :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \Omega \\ u = 0, & \gamma_2 \\ u = 1, & \gamma_4 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & \gamma_1 \cup \gamma_3 \end{cases} \tag{3.1}$$

ვთქვათ $u(z)$ აკმაყოფილებს (3.1) განტოლებას. ამასთან $v(z)$ იყოს $u(z)$-ის შეუღლებული ჰარმონიული ფუნქცია. მაშინ არსებობს $f(z) = u(z) + iv(z)$ კონფორმული ასახვა , რომელიც Ω-ს ასახავს მართკუთხედზე, ისეთი, რომ a,b,c და d წერტილების ანასახები იქნებიან $1+iM, iM, 0$ და 1 წერტილები შესაბამისად.

$f(z)$ ასახავს $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ და γ_4 წირებსშესაბამისად $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'$ და γ_4' წირებზე.

ვთქვათ Ω არის სფერო და γ იყოს წირი Ω-ზე. განვსაზღვროთ ინტეგრალი შემდეგნაირად:

$$L_p(\gamma)=\int_\gamma P(z)|dz|,$$

რომელსაც ეწოდება γ წირის P სიგრძე. P -ს ეწოდება დასაშვები, თუ $L_P(\gamma)\geq 1$.

ვთქვათ Ω არის D მრავალკუთხედის შიდა ნაწილი. $w_1,\cdots,w_n$ იყოს მრავალკუთხედის წვეროები, ხოლო $\alpha_1\pi,\cdots,\alpha_n\pi$ შიდა კუთხეები.

დავუშვათ $w=f(z)$ ფუნქცია არის კონფორმული ასახვა ზედა ნახევარსიბრტყიდან D მრვავალკუთხედზე.

თეორემა : ვთქვათ Ω^+ აღნიშნავს Ω არის სიმეტრიულ ნაწილს ზედა ნახევარ სიბრტყეში, ხოლო γ ნამდვილი ღერძის იმ ნაწილს, რომელიც შედის Ω-ში. ვთქვათ, $v(z)$ უწყვეტია $\Omega^+\cup\gamma$-ში, ჰარმონიული Ω^+-ში და ნული γ-ზე. მაშინ v ჰარმონიულად გაგრძელებადია მთელ Ω-ზე და აკმაყოფილებს სიმეტრიულ შესაბამისობას :

$$v(\bar{z})=-v(z)\ .$$

იგივე პირობებში, თუ $v(z)$ არის $f(z)$ ანალიზური ფუნქციის წარმოსახვითი ნაწილი Ω^+ -ში, მაშინ $f(z)$-ს აქვს ანალიზური გაგრძელება და სამართლია

$$f(z)=\overline{f(z)}$$

ტოლობა.

ამ თეორემის ძალით, $f(z)$ ასახვა შეიძლება იყოს უწყვეტი (z_k,z_{k+1}) სეგმენტზე. თუ ამ სეგმენტზე არსებობს $f'(z)$, მაშინ $Argf'(z)$ უნდა იყოს მუდმივი. $z=z_k$ წერტილში $Argf(z)$-მა უნდა გაიაროს განსაკუთრებული, სპეციფიკური ნახტომი

$$(1-\alpha_k)\pi=\beta_k\pi \tag{3.2}$$

რაც ნიშნავს, რომ $Arg(z)$ არის უბან-ნუბან მუდმივი ფუნქცია. აქედან გამოდის, რომ $f_k(z)$ ფუნქცია არის ანალიზური ზედა ნახევარსიბრტყეში, აკმაყოფილებს (3.2) განტოლებას და $Argf_k(z)$ არის მუდმივი ნამდვილ ღერძზე. ამასთან

$$f_k(z)=(z-z_k)^{-\beta_k},$$

მაშინ

$$f'(z)=C\prod_{k=1}^{n-1}f_k(z)$$

რაიმე C მუდმივისთვის და მეორე რიგის წარმოებული შეიძლება ჩაიწეროს ასე:

$$f''(z) = Cf'(z)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k - 1}{z - z_k}.$$

დავუშვათ Ω არის w ღერძზე D მრავალკუთხედის შიდა ნაწილი. მისი წვეროები იყოს $w_1, \cdots, w_n$ და შიდა კუთხეები $\alpha_1\pi, \cdots, \alpha_n\pi$. ვთქვათ $f(z)$ არის კონფორმული ასახვა ზედა ნახევარსიბრტყიდან Ω-ზე და $f(\infty) = w_n$. მაშინ შვარც-კრისტოფელის წარმოდგენასამ ასახვისთვის აქვს სახე :

$$w = f(z) = A + C\int_0^z \prod_{k=1}^{n-1}(\zeta - z_k)^{\alpha_{k-1}} d\zeta \tag{3.3}$$

2.4. ასახვა ზედა ნახევარსიბრტყიდან ერთეულოვან წრეზე და მართკუთხედზე

<u>თეორემა</u> : (შვარც-კრისტოფელის ასახვა ერთეულოვნი წრისათვის)ვთქვათ Ω იყოს D მრავალკუთხედის შიდა ნაწილი,რომლის წვეროებია $w_1, \cdots, w_n$ და შიდა კუთხეებია $\alpha_1\pi, \cdots \alpha_n\pi$. დავუშვათ $f(z)$ არის ნებისმიერი კომფორმული ასახვა ერთეულოვანი წრეწირიდან Ω-ზე, მაშინ შვარც-კრისტოფელის ასახვა შეიძლება მოიცეს ასეთი სახით:

$$w = f(z) = A + C\int_0^z \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\zeta}{z_k}\right)^{\alpha_k - 1} d\zeta \tag{4.1}$$

რაიმე A და C კომპლექსური მუდმივებისთვის, სადაც $w_k(z) = f_k(z), k = 1, \cdots, n$-სთვის.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ჩვენ გვაქვს ასახვა ზედა ნახევარსიბრტყიდან მართკუთხედზე. სიმეტრიის გამოყენებით ვირჩევთ $z_1 = -\frac{1}{k}$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$ და $z_4 = \frac{1}{k}$.

შვარც-კრისტოფელის ასახვა შეიძლება გამოისახოს პირველი გვარის ელიფსური ინტეგრალით:

$$f(z) = A + C_1\int_0^z \prod_{j=1}^{4}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta - z_j}} = C_1\int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - k^{-2})(\zeta^2 - 1)}} =$$

$$= k^2 C_1\int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(k^2\zeta^2 - 1)(\zeta^2 - 1)}} = C\int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - k^2\zeta^2)(1 - \zeta^2)}} =$$

$$= C\int_0^{\sin\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}} = CF(k, z)$$

ჩვენ შემთხვევაში $w_3 = f(z_3) = F(k,1)$. ნორმირებით C გამოდის 1-ის ტოლი.

დავუშვათ $w_3 = K$ და გამოვთვალოთ $w_4 = f(z_4) = f\left(\frac{1}{k}\right)$. გვექნება

$$w_4 = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-k^2\zeta^2)(1-\zeta^2)}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-k^2\zeta^2)(1-\zeta^2)}}}_{K(k)} + \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-k^2\zeta^2)(1-\zeta^2)}} \quad 0<k<1$$

ამ უკანასკნელისთვის

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-k^2\zeta^2)(1-\zeta^2)}} \tag{4.2}$$

ცვლადთა გარდაქმნით გვექნება

$$\eta = \frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{k'\zeta} \Leftrightarrow \zeta = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2\eta^2}} .$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$d\zeta = \frac{k'^2\eta d\eta}{(1-k'^2\eta^2)^{3/2}} ,$$

სადაც $k' = \sqrt{1-k^2}$. ახალი ინტეგრალის საზღვარი იქნება

$$\begin{cases} \zeta = 1, & \eta = 0 \\ \zeta = \frac{1}{k}, & \eta = 1 \end{cases}$$

(4.2)-ის ინტეგრალქვეშა ნამრავლი გამოდის შემდეგი ორი ტოლობიდან

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1-k'^2\eta^2}}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{k'^2\eta^2}{1-k'^2\eta^2}}} = \frac{i\sqrt{1-k'^2\eta^2}}{k'\eta};$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\zeta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2\frac{1}{1-k'^2\eta^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-k'^2\eta^2-(1-k'^2)}{1-k'^2\eta^2}}} = \frac{\sqrt{1-k'^2\eta^2}}{k'\sqrt{1-\eta^2}}.$$

(4.2) ინტეგრალი შეიძლება დავწეროთ ასეთნაირად

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{(1-k^2\zeta^2)(1-\zeta^2)} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k'^2\eta^2}}{k'(1-\eta^2)} \frac{i\sqrt{1-k'^2\eta^2}}{k'\eta} \frac{k'^2\eta}{(1-k'^2\eta^2)^{3/2}} d\eta =$$

$$=i\int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{\left(1-k'^2\eta^2\right)\left(1-\eta^2\right)}}=iK\left(k'\right)=iK'\left(k\right).$$

$z_4=\frac{1}{k}$ აისახება $w_4=K(k)+iK'(k)$-ზე, $z_1=-\frac{1}{k}$ და $z_2=-1$ აისახება $w_1=-K(k)+iK'(k)$ და $w_2=-K(k)$ წერტილებზე შესაბამისად. ოთხკუთხედის კონფორმული მოდული მოიცემა შემდეგნაირად:

$$M\left(Q;w_1,w_2,w_3,w_4\right)=\frac{K'(k)}{2K(k)}.$$

ვთქვათ $A(z)$ და $B(z)$ ორი მერომორფული მატრიცული ფუნქციაა შესაბამისად $\left(s_1,s_2,s_3,s_4\right)$ და $\left(\tilde{s}_1,\tilde{s}_2,\tilde{s}_3,\tilde{s}_4\right)$ პირველი რიგის პოლუსებით. დავუშვათ

$$\frac{dy}{dz}=A(z)y(z)\quad,\quad \frac{dy}{dz}=B(z)y(z) \tag{4.3}$$

მერომორფულად ექვივალენტური განტოლებათა სისტემებია, რაც ნიშნავს, რომ არსებობს მერომორფული მატრიცული ფუნქცია, ისეთი რომ $A(z)$ და $B(z)$ მატრიცული ფუნქციები ერთმანეთს უკავშირდებიან თანადობით :

$$A(z)=M^{-1}(z)\cdot dM(z)+M(z)B(z)M^{-1}(z)$$

მაშინ $\left(s_1,s_2,s_3,s_4\right)$ და $\left(\tilde{s}_1,\tilde{s}_2,\tilde{s}_3,\tilde{s}_4\right)$ კონფორმულად ექვივალენტური ოთხეულებია.

ანალოგიურად, (4.3) სისტემებს ეწოდებათ ჰოლომორფულად ექვივალენტურები, თუ $M(z)$ ჰოლომორფული მატრიც-ფუნქციაა.

ასეთ პირობებში სამართლიანია შემდეგი თეორემა :

<u>ძირითადი თეორემა</u>: ვთქვათ $f=C\cup\{\infty\}\to C\cup\{\infty\}$ ისეთი კონფორმული ასახვაა, რომ $f\left(s_j\right)=\tilde{s}_j$, $j=1,2,3,4$ და (4.3) ჰოლომორფულად ექვივალენტური ჰოინის განტოლებისგან ინდუცირებული სისტემებია, მაშინ

$$p\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \\ \rho_1^{(1)} & \rho_1^{(2)} & \rho_1^{(3)} & \rho_1^{(4)}, & z \\ \rho_2^{(1)} & \rho_2^{(2)} & \rho_2^{(3)} & \rho_2^{(4)} & \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} \tilde{s}_1 & \tilde{s}_2 & \tilde{s}_3 & \tilde{s}_4 & \\ \rho_1^{(1)} & \rho_1^{(2)} & \rho_1^{(3)} & \rho_1^{(4)}, & \tilde{z} \\ \rho_2^{(1)} & \rho_2^{(2)} & \rho_2^{(3)} & \rho_2^{(4)} & \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

თეორემის დამტკიცება ზემოთ მოყვანილი მსჯელობებიდან და კონსტრუქციებიდან ადვილად გამომდინარეობს. მართლაც, რადგან f რიმანის სფეროს ჰომეომორფიზმია, ამიტომ ის შეგვიძლია ჩავთვალოთ კოორდინატთა სისტემის ცვლილებად. ასეთ პირობებში კი ცნობილია, რომ ფუქსის სისტემა ინვარიანტულია კოორდინატთა სისტემის

ცვლილების მიმართ. ამრიგად, გვაქვს ორი მეორე რიგის ფუქსის სისტემა ოთხი განსაკუთრებული წერტილით. რადგან $(s_1, s_2, s_3, s_4,\ )$და$(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3, \tilde{s}_4,\ )$ ოთხეულები კონფორმულად ექვივალენტურია, ამიტომ $\exists g$ კონფორმული ასახვა $C \cup \{\infty\}$ თავისთავზე ისეთი, რომ ორივე ოთხეული აისახება ოთხეულში $(0,\ \mu_i\ ,\ i+\mu_i\ ,\ i)$. ამრიგად მივიღებთ ორ განტოლებათა სისტემას, რომლებსაც ერთი და იგივე განსაკუთრებული წერტილები აქვთ. რადგან ისინი ჰოლომორფულად ექვივალენტურებიარიან, ამიტომ $\operatorname{Re} s_{s_j} A(z)$ და $\operatorname{Re} s_{\tilde{s}_j} B(z)$ მუდმივი მატრიცები ერთმანეთის შეუღლებულები ქნება. საიდანაც გამომდინარეობს, რომ მათი მახასიათებელი ფესვები ტოლებია. აქედან კი გამოდის (4.4) ტოლობა.

აქვე შევნიშნოთ, თეორემაში მითითებული ოთხეულების ან ჰარმონიული ფარდობის ტოლობა (რომელიც $(a,\ b,\ c,\ d)$ ოთხეულისათვის განიმარტებით არის $\dfrac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$ კომპლექსური რიცხვი) საკმარისი არ არის თეორემის სამართლიანობისათვის, ამიტომ თეორემიდან გამოდის, რომ კონფორმული მოდული ჰოინის განტოლების ინვარიანტია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ორი ოთხეულის კონფორმული მოდულები ერთმანეთის ტოლია და გვაქვს ფუქსის ჰოლომორფულად ექვივალენტური მატრიცები, მაშინ მათი მონოდრომიის ჯგუფები ერთმანეთის შეუღლებულები იქნებიან.

დასკვანა

ნაშრომში განხილულია ანალიზურ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემების თეორიის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანა: ჰოინის განტოლების ამონახსნთა სივრცის ანალიზური თვისებების კვლევა და მისი განსაკუთრებულ წერტილთა დამოკიდებულება ამ წერტილების განლაგებაზე გაფართოებულ კომპლექსურ სიბრტყეზე.

ძირითადი თეორემა ჩამოყალიბებულია 2.4 პარაგრაფში, რომელის თანახმადაც წერტილთა ორი ოთხეულის კონფორმულად ექვივალენტურობიდან გამომდინარეობს მათი რიმანის სქემების ტოლობა. ეს შედეგი ახალია და მის მისაღებად ნაშრომში განვითარებულია ადეკვატური საკვლევი აპარატი. კერძოდ, განხილულია ანალოგიური ამოცანა რიმანის და გაუსის ჰიპერგეომეტრიული განტოლებებისათვის. ეს ამოცანა კარგადაა შესწავლილი სამეცნიერო ლიტერატურაში. ნაშრომის შესავალში და პირველ თავში ჩამოყალიბებულია ძირითადი თეორემები, განმარტებები და მეთოდები, რომლებიც ძირითადი შედეგის მისაღებადაა საჭირო. აქვეა გაკეთებული ლიტერატურის მიმოხილვა. ძირითადი შედეგი საინტერესა იმ თვლასაზრისით, რომ რიმანის განტოლების შემთხვევაში განტოლებათა სისტემის განსაკუთრებული წერტილების განლაგება გავლენას ვერ ახდენს ამონახსნთა სივრცის ანალიზურ თვისებებზე, თეორემაში გამოყოფილია ის შემთხვევა, როდესაც ეს თვისება ვრცელდება ჰოინის განტოლებაზე.

გამოყენებული ლიტერატურა:

[1] Beukers F. – Notes on differential equations and hypergeometric functions;*Manuscript, august 21, 2009;* [21 – 31].

[2] Heckman G. – Tsinghua lectures on hypergeometric functions; *Manuscript, December 8, 2015;* [39 – 42].

[3] Kristenson G. – Second order differencial equations; Springer; [61 – 73].

[4] Nehari Z. – Conformal mapping; Dover publications, Inc. NEW YORK; [189 – 207].

[5] Osima t. – An elementary approach to the Gauss hypergeometric function; [5 – 20].

[6] Rasila A. - Numerical Conformal Mapping and Capacity Computation; *Espoo; November 3, 2009;* [41 – 48].

[7] Takemura K. – Middle Convolution and Heun's equation; Sigma 5; 2009; [1 – 5].

[8]Vidunas R.- Algebraic transformations of Gauss hypergeometric functions; (ArXiv: *Math/0408269v3 mathCA;* [3 – 9].

[9]Голубев В. В. – Лекции Дифференциальных Уравнений; Москва 1950; [221 – 237].