

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ნათია მჭედლიძე

უსასრულობაში ქრობადი სისქის პრიზმული გარსი
იერარქიული მოდელების ნულოვან მიახლოებაში

**Prismatic Shell with the Thickness Vanishing at Infinity
in the $N=0$ Approximation of Hierarchical Models**

გამოყენებითი მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია გამოყენებითი მათემატიკის მაგისტრის
აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ნატალია ჩინჩალაძე
ფიზიკა მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი

თბილისი 2016

ს ა რ ჩ ე ვ ი

ანოტაცია	3
Summary	5
შესავალი	7
1. დამხმარე მასალა	10
1.1. პრიზმული გარსების ი. ვეკუას იერარქიული მოდელების აგების ძირითადი იდეა.....	10
1.2. $N = 0$ მიახლოება.....	15
2. წამახვილებული ფირფიტა	20
2.1. უსასრულობაში ქრობადი სისქის ფირფიტა იერარქიული მოდელების ნულოვან მიახლოებაში.....	20
2.2. სასრული სიგრძისა და სიგანის ფირფიტის ღუნვის ამოცანა.....	23
2.3. უსასრულობაში ქრობადი სისქის ფირფიტის ღუნვის ამოცანა.....	26
დასკვნა.....	28
ციტირებული ლიტერატურა.....	29

ანოტაცია

მეოცე საუკუნის 50-იან წლებში დასაბამი მიეცა წამახვილებული პრიზმული გარსების, კერძოდ, ფირფიტების კვლევას, სახელდობრ, 1955 წელს ი. ვეკუამ (იხ. [26-28], [30]) წამოჭრა დრეკადი წამახვილებული ფირფიტების შესწავლის საკითხი, როცა ფირფიტის სისქე მთელ საზღვარზე ან მის ნაწილზე ნული ხდება (მან იმ ფირფიტებს და გარსებს, რომელთა სისქე საზღვარზე ნული ხდება „წამახვილებული“ ფირფიტები და გარსები უწოდა). პრაქტიკაში ასეთი ფირფიტები და ღეროები ხშირად გვხვდება სივრცულ კონსტრუქციებში ნაწილობრივ ჩამაგრებული ნაპირებით, როგორცაა, მაგალითად, სტადიონების სახურავები, თვითმფრინავების ფრთები, წყალქვეშა ნავების ფრთები და ა.შ., გარდა ამისა მანქანათმშენებლობაში (საჭრელი და სარანდავი ჩარხები), კოსმონავტიკაში, ტურბინებში და სხვა საინჟინრო სფეროებში (მაგალითად, კაშხლებში). წამახვილებული ფირფიტების მიერ დაკავებული არეები, თუ მათ განვიხილავთ, როგორც სამგანზომილებიანს, წარმოადგენენ სამგანზომილებიან არეებს, საზოგადოდ, არალიპშიცური საზღვრებით. ამ ამოცანას მათემატიკურად მივყავართ რიგის გადაგვარების მქონე განტოლებებისა და სისტემებისათვის სასაზღვრო ამოცანების (ელიფსური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის) და საწყის-სასაზღვრო ამოცანების (ჰიპერბოლური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის) დასმისა და ამოხსნადობის გამოკვლევის საკითხამდე [შესაბამის გამოკვლევებთან დაკავშირებით იხ. მიმოხილვები [15], [34]-სა და [21]-ში, აგრეთვე ი. ვეკუას კომენტარები [26]-ში (გვ. 86)]. ამავე პერიოდში ი. ვეკუამ შემოგვთავაზა ე.წ. პრიზმული გარსების, კერძოდ, ცვლადი სისქის ფირფიტების მათემატიკური მოდელი, რომელიც ეფუძნება სისქის ცვლადის მიმართ სამგანზომილებიანი წრფივი დრეკადობის თეორიის გადაადგილების ვექტორის, ძაბვის და დეფორმაციის ტენზორების ფურიე-ლეჟანდრის ორთოგონალურ მწკრივებად გაშლას. გაშლის პირველი $N+1$ წევრის შენარჩუნებით მან შემოიღო ე.წ. N -ური მიახლოება და განსაზღვრა შესაბამისი ორგანზომილებიანი მოდელების იერარქია. ყოველი ეს მიახლოება $N=0,1,\dots$ შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც პრიზმული გარსების დამოუკიდებელი მოდელი. 60-იან წლებში ი. ვეკუამ [28] განავითარა ანალოგიური მათემატიკური მოდელი თხელი დამრეცი გარსებისათვის. ფირფიტებსა და გარსებთან დაკავშირებული ყველა მისი შედეგი თავმოყრილია მის მონოგრაფიაში [26]. ი. ბაბუშკას, დ. გორდეზიანის, ვ. გულიაევის, ი. ხომას, თ.მეუნარგიას, გ.ჯაიანი, კ. შვაბის,

თ. ვაშაყმაძის, ვ. ჟღენტის და სხვათა შრომები (იხ. [2-5], [8], [9], [14-17], [20], [21], [24], და იქ მითითებული ლიტერატურა) მიემდგნა ი. ვეკუას მოდელის შემდგომ ანალიზს.

მართკუთხა კვეთის მქონე ღეროებისათვის იერარქიული მოდელები აგებულია გ. ჯაიანის მიერ, რისთვისაც მან ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების და გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები გაშალა ორმაგი ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივად ღეროს სიგანისა და სისქის მიმართ [16].

ნაშრომი ეხება ისეთი ექსპონენციალურად წამახვილებული პრიზმული გარსის ღუნვის ამოცანას, რომლის სისქე იცვლება შემდეგი კანონით

$$2h = 2h_0 e^{-\kappa(x_1+x_2)}, \quad h_0 = \text{const} > 0, \quad \kappa = \text{const} \geq 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

განხილულია ორი შემთხვევა:

I. როცა გარსის გეგმილი Ox_1x_2 სიბრტყეზე არის

$$\omega_l = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq l; \quad 0 \leq x_2 \leq l\}.$$

დამტკიცებულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები $X^\kappa(\omega_l) \equiv W_2^1(\omega_l)$ სივრცეში.

II. როცა გარსის გეგმილი Ox_1x_2 სიბრტყეზე არის

$$\omega := \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 < +\infty; \quad 0 \leq x_2 < +\infty\}.$$

დასმული ამოცანის ამონახსნი აგებულია ინტეგრალური ფორმით, ხოლო კერძო შემთხვევაში ჩაიწერება ცხადი სახით.

Summary

In the fifties of XX century investigations of cusped elastic prismatic shells actually takes its origin, namely, in 1955 I. Vekua raised the problem of investigation of elastic cusped prismatic shells, whose thickness on the prismatic shell entire boundary or on its part vanishes (see [26-28], [30]). In practice, such cusped prismatic shells, in particular, cusped plates, and cusped beams (i.e., beams whose cross-sections area vanishes at least at one end of the beam) are often encountered in spatial structures with partly fixed edges, e.g., stadium ceilings, aircraft wings, submarine wings etc., in machine-tool design, as in cutting-machines, planning-machines, in astronautics, turbines, and in many other application fields of engineering. Investigation of elastic cusped prismatic shells, considered as 3D ones, may occupy 3D domains with, in general, non-Lipschitz boundaries. The problem mathematically leads to the question of setting and solving of boundary value problems for even order equations and systems of elliptic type with the order degeneration in the static case and of initial boundary value problems for even order equations and systems of hyperbolic type with the order degeneration in the dynamic case (for corresponding investigations see the survey [15], [34], [21] and also I. Vekua's comments in [26, p.86]). At the same time I. Vekua introduced a new mathematical model for elastic prismatic shells which was based on expansions of the three-dimensional displacement vector fields and the strain and stress tensors in linear elasticity into orthogonal Fourier-Legendre series with respect to the variable plate thickness. By taking only the first $N + 1$ terms of the expansions, he introduced the so called N -th approximation. Each of these approximations for $N = 0; 1; \dots$ can be considered as an independent mathematical model of plates. In particular, the approximation for $N = 1$ corresponds to the classical Kirchhoff plate model. In the sixties, I. Vekua developed the analogous mathematical model for thin shallow shells [28]. All his results concerning plates and shells are collected in his monograph [25]. Works of I. Babuska, D. Gordeziani, V. Guliaev, I. Khoma, A. Khvoles, T. Meunargia, C. Schwab, T. Vashakmadze, V. Zhgenti, G. Jaiani, G. Tsikarishvili, M. and G. Avalishvili, W. Wendland, D. Natroshvili, S. Kharibegashvili, N. Chinchaladze, R. Gilbert, and others are devoted to further analysis of I. Vekua's models (rigorous estimation of the modeling error, numerical solutions, etc.) and their generalizations (see, e.g., [2-5], [8], [9], [14-17], [20], [21], [24]).

The analogues system in the case of (N_3, N_2) approximation of hierarchical models for cusped beams, in general, beams with variable rectangular cross-sections are derived by G. Jaiani ([16]).

The work is devoted to the prismatic shell with the thickness vanishing at infinity in the $N=0$ approximation of hierarchical models. The thickness of the plate is given by the expression as follows

$$2h = 2h_0 e^{-\kappa(x_1+x_2)}, \quad h_0 = \text{const} > 0, \quad \kappa = \text{const} \geq 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

The following cases are considered:

I. Projection of the plate on Ox_1x_2 is given by the following expression

$$\omega_l = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq l; \quad 0 \leq x_2 \leq l\}.$$

The existents and uniqueness theorems are proved in Hilbert Space $X^\kappa(\omega_l) \equiv W_2^1(\omega_l)$.

II. Projection of the plate on Ox_1x_2 is as follows

$$\omega := \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 < +\infty; \quad 0 \leq x_2 < +\infty\}.$$

The solutions of the setting problems are given in integral forms, in some concrete cases it is given in explicit form.

შესავალი

მეოცე საუკუნის 50-იან წლებში დასაბამი მიეცა წამახვილებული პრიზმული გარსების, კერძოდ, ფირფიტების კვლევას, სახელდობრ, 1955 წელს ი. ვეკუამ (იხ. [26-28], [30]) წამოჭრა დრეკადი წამახვილებული ფირფიტების შესწავლის საკითხი, როცა ფირფიტის სისქე მთელ საზღვარზე ან მის ნაწილზე ნული ხდება (მან იმ ფირფიტებს და გარსებს, რომელთა სისქე საზღვარზე ნული ხდება „წამახვილებული“ ფირფიტები და გარსები უწოდა). პრაქტიკაში ასეთი ფირფიტები და ღეროები ხშირად გვხვდება სივრცულ კონსტრუქციებში ნაწილობრივ ჩამაგრებული ნაპირებით, როგორცაა, მაგალითად, სტადიონების სახურავები, თვითმფრინავების ფრთები, წყალქვეშა ნაგებობების ფრთები და ა.შ., გარდა ამისა მანქანათმშენებლობაში (საჭრელი და სარანდავი ჩარხები), კოსმონავტიკაში, ტურბინებში და სხვა საინჟინრო სფეროებში (მაგალითად, კაშხლებში). წამახვილებული ფირფიტების მიერ დაკავებული არეები, თუ მათ განვიხილავთ, როგორც სამგანზომილებიანს, წარმოადგენენ სამგანზომილებიან არეებს, საზოგადოდ, არალიპშიცური საზღვრებით. ამ ამოცანას მათემატიკურად მივყავართ რიგის გადაგვარების მქონე განტოლებებისა და სისტემებისათვის სასაზღვრო ამოცანების (ელიფსური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის) და საწყის-სასაზღვრო ამოცანების (ჰიპერბოლური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის) დასმისა და ამოხსნადობის გამოკვლევის საკითხამდე [შესაბამის გამოკვლევებთან დაკავშირებით იხ. მიმოხილვები [15], [34]-სა და [21]-ში, აგრეთვე ი. ვეკუას კომენტარები [26]-ში (გვ. 86)].

მეოცე საუკუნის 50-იან წლებში ი. ვეკუამ შემოგვთავაზა ე.წ. პრიზმული გარსების, კერძოდ, ცვლადი სისქის ფირფიტების მათემატიკური მოდელი, რომელიც ეფუძნება სისქის ცვლადის მიმართ სამგანზომილებიანი წრფივი დრეკადობის თეორიის გადაადგილების ვექტორის, ძაბვის და დეფორმაციის ტენზორების ფურიე-ლეჟანდრის ორთოგონალურ მწკრივებად გაშლას. გაშლის პირველი $N+1$ წევრის შენარჩუნებით მან შემოიღო ე.წ. N -ური მიახლოება და განსაზღვრა შესაბამისი ორგანზომილებიანი მოდელების იერარქია. ყოველი ეს მიახლოება $N=0,1,\dots$ შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც პრიზმული გარსების დამოუკიდებელი მოდელი. 60-იან წლებში ი. ვეკუამ [28] განავითარა ანალოგიური მათემატიკური მოდელი თხელი დამრეცი გარსებისათვის. ფირფიტებსა და გარსებთან დაკავშირებული ყველა მისი შედეგი თავმოყრილია მის მონოგრაფიაში [26]. ი. ბაბუშკას, დ. გორდეზიანის, ვ. გულიაევის, ი. ხომას, თ. მეუნარგიას, ვ. შვაბის, თ. ვაშაყმადის, ვ. ჟლენტის და სხვათა შრომები (იხ. [2-6], [8], [11-

25], [33] და იქ მითითებული ლიტერატურა) მიეძღვნა ი. ვეკუას მოდელის შემდგომ ანალიზს, სახელდობრ, მოდელირების და რიცხვითი ამონახსნის ცდომილების ზუსტ შეფასებას, მოდელების განზოგადებას არადამრეცი გარსებისათვის, ან იზოტროპულ შემთხვევას და სხვა. ამასთან, როგორც ეს უკვე აღნიშნული იყო, მან დასვა საკითხი ისეთი პრიზმული გარსების გამოკვლევის თაობაზე, რომელთა სისქე გარსის საზღვრის ნაწილზე ან მთელ საზღვარზე ნული ხდება (იხ. ი. ვეკუას კომენტარი [26]-ში (გვ. 86)). მან იმ ფირფიტებს და გარსებს, რომელთა სისქე საზღვარზე ნული ხდება „წამახვილებული“ ფირფიტები და გარსები უწოდა.

მართკუთხა კვეთის მქონე ღეროებისათვის იერარქიული მოდელები აგებულია გ. ჯაიანის მიერ, რისთვისაც მან ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების და გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები გაშალა ორმაგი ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივად ღეროს სიგანისა და სისქის მიმართ ([16]).

ზოგიერთი ამოცანა წამახვილებული ფირფიტებისა და ღეროებისათვის, რომელთა სისქე, ცხადია, ცვალებადია, გამოკვლეული იყო მ. მახოვერის, ა. ხვოლესის, ს. მიხლინის, გ. ჯაიანის, გ. ცისკარიშვილის, ნ. ხომასურიძის, გ. დევდარიანის, ს. უზუნოვის, ს. ნაგულესვარანის, ნ. ჩინჩალაძის და ს. ხარიბეგაშვილის შრომებში (იხ. [24] და მიმოხილვები [15]-ში, [16]-ში, [21]-ში და იქვე მითითებული ლიტერატურა). ამ ავტორების ნაშრომები ძირითადად ეძღვნება ხარისხოვანი ცვლადი სისქის მქონე ფირფიტების და ღეროების შესწავლას ბერნულ-ეილერის ღეროების, კირხჰოფის ფირფიტების და ი. ვეკუას იერარქიული მოდელების ნულოვანი და პირველი მიახლოებების ბაზაზე.

[23]-ში ლიფშიცის არეების შემთხვევაში გ. ჯაიანმა, ს. ხარიბეგაშვილმა, დ. ნატროშვილმა და ვ. ვენდლანდმა ააგეს ორგანზომილებიანი იერარქიული მოდელები დრეკადი წამახვილებული პრიზმული გარსებისათვის. ვარიაციული მეთოდების გამოყენებით სათანადო წონიან ფუნქციონალურ სივრცეებში დამტკიცებულია არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები შესაბამისი ორგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანებისათვის. ამ ორგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების საშუალებით აგებულია სამგანზომილებიანი არისათვის მიახლოებითი ამონახსნების მიმდევრობა. ეს მიმდევრობა სობოლევის H^1 სივრცეში კრებადია ამოსავალი სამგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნისაკენ. ცხადი სახით არის ამოწერილიორგანზომილებიანი იერარქიული მოდელების შესაბამისი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები ზოგადი ორთოგონალური სისტემისათვის და, კერძოდ,

ლექანდრის პოლინომებისათვის.

შემთხვევებს, როცა პრიზმული გარსის სისქე საზღვარზე ნულდება მიემდვნა ე. მახოვერის, ს.მიხლინის, ა. ხვოლესის, გ. ჯაიანის, დ. ნატროშვილის, ს. ხარიბეგაშვილის, ვ. ვენდლანდის [22], გ. ჯაიანი [16], ნ. ჩინჩალაძის [7], ნ. ჩინჩალაძის, გ. ჯაიანის [20] (იხ. აგრეთვე ნ. ჩინჩალაძე, რ. ჯილბერტი, გ. ჯაიანი, ს. ხარიბეგაშვილი, დ. ნატროშვილი [21]) და სხვათა შრომები. ნ. ჩინჩალაძის, გ. ჯაიანის, ბ. მაისტრენკოს და პ. პოდო-გუიდულის [10] მიერ იერარქიული მოდელების ფარგლებში შესწავლილი იყო წამახვილებულ პრიზმულ სხეულებში შინაგანი შეყურსული ძალების წარმოქმნის საკითხი. შემდგომში ი. ვეკუას მეთოდის განზოგადებით განხილული იყო დრეკადი ღეროების ერთგანზომილებიანი იერარქიული მოდელების აგების და გამოკვლევის საკითხები გ. ჯაიანის [15] და მ. და გ. ავალიშვილების [2-4] (იხ. აგრეთვე ნ. ჩინჩალაძე, რ. ჯილბერტი, გ. ჯაიანი, ს. ხარიბეგაშვილი, დ. ნატროშვილი [9]) მიერ. წამახვილებულ სტანდარტულ და პრიზმულ გარსებთან, ფირფიტებთან და ღეროებთან დაკავშირებით მიღებული შედეგები დაწვრილებით არის მიმოხილული გ. ჯაიანის [14] მონოგრაფიაში.

ნაშრომი შედგება შესავლის, ორი თავისა და მითითებული ლიტერატურისგან.

პირველი თავი დამხმარე ხასიათისაა. აქ მოტანილია ის მასალა, რომელიც გამოყენებულია ძირითადი ამოცანის ამოსახსნელად.

მეორე თავი ეხება ექსპონენციალურად წამახვილებული პრიზმული გარსის ღუნვის ამოცანას იერარქიული მოდელების ნულოვან მიახლოებაში.

1. დამხმარე მასალა

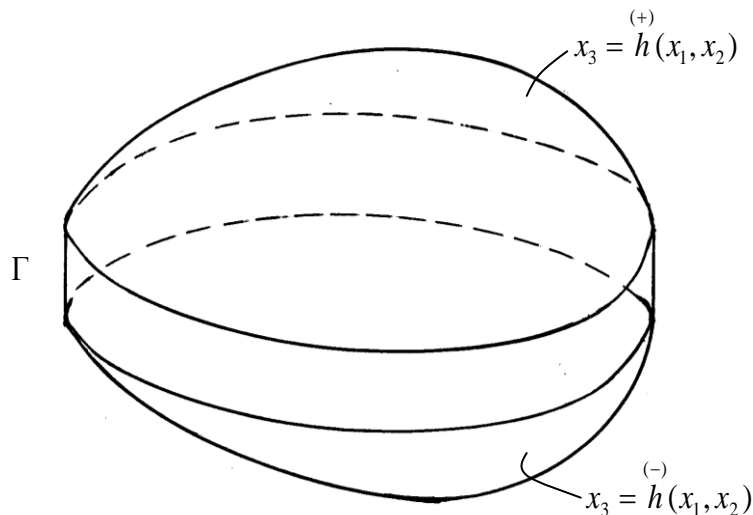
1.1. პრიზმული გარსების ი. ვეკუას იერარქიული მოდელების

აგების ძირითადი იდეა

სხეულს, რომელიც ზემოდან და ქვემოდან შემოსაზღვრულია

$$x_3 = h^{(+)}(x_1, x_2) \text{ და } x_3 = h^{(-)}(x_1, x_2)$$

ზედაპირებით, ხოლო გვერდიდან $-\Gamma$ ცილინდრული ზედაპირით (იხ. ნახ. 1.1), რომლის მსახველი ვერტიკალური Ox_3 ღერძის პარალელურია, ეწოდება *პრიზმული გარსი* (იხ. [26], [32], აგრეთვე [1]).

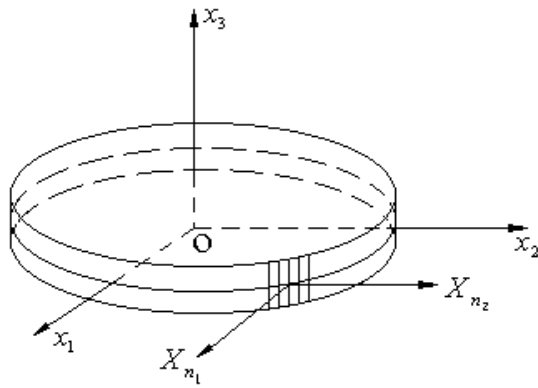


ნახ. 1.1

სიმეტრიულ შემთხვევაში, ე.ი. როცა $h^{(-)}(x_1, x_2) = -h^{(+)}(x_1, x_2)$ პრიზმული გარსი წარმოადგენს ცვლადი სისქის ფირფიტას. $2h(x_1, x_2) = h^{(+)}(x_1, x_2) - h^{(-)}(x_1, x_2) \geq 0$ სიდიდეს ეწოდება *პრიზმული გარსის სისქე*.

პრიზმული გარსის გეგმილი Ox_1x_2 სიბრტყეზე აღვნიშნოთ ω -თი, მის საზღვარს *გარსის საზღვარი* ეწოდება.

ფუძეების ზომებთან შედარებით მცირე სიმაღლის მქონე პრიზმას (ცილინდრს) *ფირფიტა* ეწოდება, ხოლო მის $2h$ სიმაღლეს (იხ. ნახ. 1.2) – *ფირფიტის სისქე*. ვიგულისხმობთ, რომ ფირფიტის შუა სიბრტყე (ე.ი. ფუძეების პარალელური და მათგან თანაბრად დაშორებული სიბრტყე) ემთხვევა Ox_1x_2 -ს. ფირფიტას უწოდებენ წამახვილებულს, როცა ფირფიტის სისქე მთელ საზღვარზე ან მის ნაწილზე ნული ხდება.



ნახ. 1.2

დრეკადობის წრფივი სამგანზომილებიანი თეორიის ძირითადი დამოკიდებულებები შედგება “მოძრაობის” განტოლებებისგან

$$X_{ij,j} + \Phi_i = \rho \ddot{u}_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad x \in \Omega \subset R^3, \quad t > t_0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (1.1)$$

ჰუკის განზოგადებული კანონისგან (იზოტროპული შემთხვევა)

$$X_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (1.2)$$

კინემატიკური დამოკიდებულებებისგან

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.3)$$

სადაც

$$\theta := e_{ii} = e_{11} + e_{22} + e_{33}, \quad (1.4)$$

Φ_i -ით აღვნიშნავთ სხეულზე მოქმედი მოცულობითი ძალის კომპონენტებს, X_{ij} -თ, $i, j = 1, 2, 3$, აღვნიშნავთ x_i ნორმალის მქონე ფართზე მოქმედი ძაბვის ვექტორის გეგმილს x_j ღერძზე. შევნიშნოთ, რომ ნაკრები (მთავარი) ფიზიკური მომენტის ნულთან ტოლობის პირობიდან გამომდინარეობს ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულობა:

$$X_{ij} = X_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

u_i , $i = 1, 2, 3$, კომპონენტებს გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები, ან უბრალოდ გადაადგილებები ეწოდება x_i , $i = 1, 2, 3$, ღერძების გასწვრივ. e_{ij} -ს ეწოდება დეფორმაციის ტენზორი, λ და μ ლამეს მუდმივებია, ხოლო ρ სხეულის სიმკვრივეა,

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ -კრონეკერის სიმბოლოა. i -თი აღვნიშნავთ წარმოებულს x_i ცვლადის

მიმართ, ხოლო ij -თი – მეორე რიგის წარმოებულს x_i და x_j ცვლადების მიმართ.

მაგალითად, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv u_{,i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \equiv u_{,ij}$. თუ რაიმე ინდექსი ერთწევრში მხოლოდ ორჯერ

გვხვდება, ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ხდება აჯამვა მის მიმართ ინდექსის ცვლილების სიმრავლეზე (შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ ლათინური არამთავრული ინდექსები იღებენ მნიშვნელობებს 1, 2, 3, ხოლო ბერძნული კი 1, 2). იმ შემთხვევაში, როცა ასეთ ფაქტს ადგილი აქვს, მაგრამ აჯამვა არ უნდა მოხდეს, ერთ-ერთ ინდექსს

ქვემოდან ან ზემოდან გავუსვამთ ხაზს. მაგალითად, $a_i^i := \sum_{i=1}^3 a_{ii}$, $a_i^i := \sum_{i=1}^3 a_i^i$, მაგრამ

$a_{ii} = a_{\bar{i}\bar{i}}$ აღნიშნავს სამ ელემენტს: a_{11} , a_{22} , a_{33} -ს იმისდა მიხედვით, თუ რა მნიშვნელობას იღებს i .

$$P_n(\tau) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\tau^2 - 1)^n}{d\tau^n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.6)$$

პოლინომებს, კერძოდ,

$$P_0(\tau) = 1, \quad P_1(\tau) = \tau, \quad P_2(\tau) = \frac{3\tau^2 - 1}{2},$$

ლეჟანდრის პოლინომები ეწოდება. ლეჟანდრის პოლინომთა სისტემა ორთოგონალურია $[-1, 1]$ სეგმენტზე:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\tau) P_m(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases} \quad (1.7)$$

(1.7)-დან ცხადია, რომ პოლინომთა

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\tau), \quad n = 0, 1, \dots,$$

სისტემა ორთონორმირებულია.

(1.7)-ში მოვახდინოთ ცვლადთა

$$\tau = ax_3 - b \quad (1.8)$$

გარდაქმნა, სადაც

$$a := \frac{1}{h}, \quad b := \frac{\tilde{h}}{h},$$

$2h := \overset{(+)}{h} - \overset{(-)}{h}$ პრიზმული გარსის სისქეა, $2\tilde{h} := \overset{(+)}{h} + \overset{(-)}{h}$. ცხადია,

$$\tau = \frac{2}{\begin{smallmatrix} (+) \\ (-) \end{smallmatrix} h - h} x_3 - \frac{\begin{smallmatrix} (+) \\ (-) \end{smallmatrix} h + h}{\begin{smallmatrix} (+) \\ (-) \end{smallmatrix} h - h}$$

და

$$\int_{\begin{smallmatrix} (+) \\ (-) \end{smallmatrix} h(x_1, x_2)} P_n(ax_3 - b) P_m(ax_3 - b) dx_3 = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases} \quad (1.9)$$

საზოგადოდ, $\varphi_n(\tau)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\tau \in [c, d]$, ორთონორმირებული სისტემის მიმართ ფურიეს მწკრივს აქვს

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(\tau)$$

სახე, სადაც

$$c_n = \int_c^d f(\tau) \varphi_n(\tau) d\tau, \quad n = 0, 1, \dots,$$

ფურიეს კოეფიციენტებია.

თუ დავუშვებთ, რომ x_3 ცვლადის მიმართ X_{ij} , e_{ij} , $u_i \in C^2$ კლასს $\left[\begin{smallmatrix} (-) \\ (+) \end{smallmatrix} h(x_1, x_2) \right]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$(X_{ij}, e_{ij}, u_i)(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) a(x_1, x_2) (X_{ijn}, e_{ijn}, u_{in})(x_1, x_2, t) P_n(ax_3 - b), \quad (1.10)$$

სადაც

$$(X_{ijn}, e_{ijn}, u_{in})(x_1, x_2, t) = \int_{\begin{smallmatrix} (+) \\ (-) \end{smallmatrix} h(x_1, x_2)} (X_{ij}, e_{ij}, u_i)(x_1, x_2, x_3, t) P_n(ax_3 - b) dx_3 \quad (1.11)$$

და (1.10)-ის მარჯვენა მხარე თანაბრად კრებადია $\left[\begin{smallmatrix} (-) \\ (+) \end{smallmatrix} h(x_1, x_2) \right]$ სეგმენტზე.

იერარქიული მოდელების აგების ი. ვეკუას მეთოდი მდგომარეობს (1.1)–(1.3) დამოკიდებულებების $P_r(ax_3 - b)$ -ზე გამრავლებით და $\begin{smallmatrix} (-) \\ (+) \end{smallmatrix} h$ -დან $\begin{smallmatrix} (-) \\ (+) \end{smallmatrix} h$ -მდე x_3 -ის მიმართ ინტეგრებით X_{ijr} , e_{ijr} , u_{ir} მათემატიკურ მომენტებზე გადასვლაში. მივიღებთ უსასრულო სისტემას

$$u_{ir}(x_1, x_2, t) := \int_{\begin{smallmatrix} (+) \\ (-) \end{smallmatrix} h(x_1, x_2)} u_i(x_1, x_2, x_3, t) P_r(ax_3 - b) dx_3$$

მომენტების მიმართ. ამასთან

$$u_i(x, t) = u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{r=0}^{\infty} a \left(r + \frac{1}{2} \right) u_{ir}(x_1, x_2, t) P_r(ax_3 - b), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.12)$$

(1.2)-დან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$X_{ijr}(x_1, x_2, t) = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ijr},$$

ხოლო მომენტების მიმართ სხვა დამოკიდებულებების მისაღებად გამოიყენება

$$\tau P_n(\tau) = nP_n(\tau) + P_{n-1}'(\tau),$$

$$P_n'(\tau) = (2n-1)P_{n-1}(\tau) + P_{n-2}'(\tau), \quad \tau \in [-1, +1],$$

დამოკიდებულებები, რომლებიც უნდა ჩაიწეროს $\left[\begin{smallmatrix} (-) & (+) \\ h, & h \end{smallmatrix} \right]$ სეგმენტისთვის (1.8) დამო-

კიდებულებების გათვალისწინებით. ამის შემდეგ, უხეშად რომ ვთქვათ, N -ური მიახლოების (იერარქიული მოდელის) მისაღებად N -ზე მეტი რიგის მომენტს უკუვაგდებთ (ჩავთვლით ნულის ტოლად) და განვიხილავთ მხოლოდ იმ დამოკიდებულებებს, რომელთა მთავარი ნაწილები შეიცავენ N რიგამდე ჩათვლით მომენტებს.

1.2. $N = 0$ მიახლოება

მოვხდებით მეთოდის ილუსტრირება $N = 0$ მიახლოებისთვის. (1.1)-დან ცხადია,

$$\begin{aligned} & \int_{h^-(x_1, x_2)}^{h^+(x_1, x_2)} X_{i\beta, \beta}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 + \int_{h^-(x_1, x_2)}^{h^+(x_1, x_2)} X_{i3,3}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 + \int_{h^-(x_1, x_2)}^{h^+(x_1, x_2)} \Phi_i(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \\ & = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{h^-(x_1, x_2)}^{h^+(x_1, x_2)} u_i(x_1, x_2, x_3, t) dx_3, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1.13)$$

მაგრამ, (1.11)-ის ძალით,

$$\int_{h^-(x_1, x_2)}^{h^+(x_1, x_2)} u_i(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = u_{io}(x_1, x_2, t), \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} & \int_{h^-(x_1, x_2)}^{h^+(x_1, x_2)} X_{i3,3}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = X_{i3} \left(x_1, x_2, h^+(x_1, x_2), t \right) - X_{i3} \left(x_1, x_2, h^-(x_1, x_2), t \right), \\ & \int_{h^-(x_1, x_2)}^{h^+(x_1, x_2)} X_{i\beta, \beta}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int_{h^-(x_1, x_2)}^{h^+(x_1, x_2)} X_{i\beta}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \\ & \quad - X_{i\beta} \left(x_1, x_2, h^+(x_1, x_2), t \right) h_{, \beta}^+ + X_{i\beta} \left(x_1, x_2, h^-(x_1, x_2), t \right) h_{, \beta}^-. \end{aligned} \quad (1.15)$$

აქ გამოვიყენებთ პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალის პარამეტრით გაწარმოების წესი:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_{c(\xi)}^{d(\xi)} f(\xi, \eta) d\eta = \int_{c(\xi)}^{d(\xi)} \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta + f(\xi, d(\xi)) \frac{\partial d}{\partial \xi} - f(\xi, c(\xi)) \frac{\partial c}{\partial \xi}.$$

თუ გლუვი ზედაპირის განტოლებას აქვს

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

სახე, მაშინ ნორმალის v_i კომპონენტებს, როგორც ეს კალკულუსის კურსიდანაც ცნობილი,

აქვთ შემდეგი სახე:

$$v_i = \pm \frac{F_{,i}}{\sqrt{(F_{,1})^2 + (F_{,2})^2 + (F_{,3})^2}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

ჩვენს შემთხვევაში

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3 - h^{\pm}(x_1, x_2),$$

ამიტომ

$$v_\beta^{(\pm)} = \frac{\mp h_\beta^{(\pm)}}{\sqrt{\left(h_{,1}^{(\pm)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(\pm)}\right)^2 + 1}},$$

$$v_3^{(\pm)} = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(h_{,1}^{(\pm)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(\pm)}\right)^2 + 1}}.$$

ამის გათვალისწინებით

$$\int_{h(x_1, x_2)^{(-)}}^{h(x_1, x_2)^{(+)}} X_{i\beta, \beta}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = X_{i\beta 0, \beta}(x_1, x_2, t) + X_{i\beta} \left(x_1, x_2, h(x_1, x_2), t \right) \sqrt{\left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2 + 1} \cdot v_\beta^{(+)} + X_{i\beta} \left(x_1, x_2, h(x_1, x_2), t \right) \sqrt{\left(h_{,1}^{(-)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)}\right)^2 + 1} \cdot v_\beta^{(-)}. \quad (1.16)$$

რადგან

$$v_3^{(\pm)} \cdot \sqrt{\left(h_{,1}^{(\pm)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(\pm)}\right)^2 + 1} = \pm 1,$$

თუ ჩავსვამთ (1.14) – (1.16) გამოსახულებებს (1.13)-ში, მივიღებთ, რომ

$$X_{i\beta 0, \beta}(x_1, x_2, t) + \left[X_{i\beta} \left(x_1, x_2, h(x_1, x_2), t \right) v_\beta^{(+)} + X_{i3} \left(x_1, x_2, h(x_1, x_2), t \right) \cdot v_3^{(+)} \right] \sqrt{\left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2 + 1} + \left[X_{i\beta} \left(x_1, x_2, h(x_1, x_2), t \right) v_\beta^{(-)} + X_{i3} \left(x_1, x_2, h(x_1, x_2), t \right) \cdot v_3^{(-)} \right] \sqrt{\left(h_{,1}^{(-)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)}\right)^2 + 1} + \Phi_{i0}(x_1, x_2, t) = \rho \ddot{u}_{i0}(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2, 3.$$

კომის ფორმულების თანახმად

$$X_{i\beta} \left(x_1, x_2, h(x_1, x_2), t \right) v_\beta^{(+)} + X_{i3} \left(x_1, x_2, h(x_1, x_2), t \right) v_3^{(+)} = Q_{vi}^{(+)}(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$X_{i\beta} \left(x_1, x_2, h(x_1, x_2), t \right) v_\beta^{(-)} + X_{i3} \left(x_1, x_2, h(x_1, x_2), t \right) v_3^{(-)} = Q_{vi}^{(-)}(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2, 3.$$

ამრიგად, $N = 0$ მიახლოებაში

$$X_{i\beta 0, \beta} + Q_{vi}^{(+)} \sqrt{\left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2 + 1} + Q_{vi}^{(-)} \sqrt{\left(h_{,1}^{(-)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)}\right)^2 + 1} + \Phi_{i0} = \rho \ddot{u}_{i0}(x_1, x_2, t); \quad (1.17)$$

$$X_{ij0}(x_1, x_2, t) = \lambda e_{kk0} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij0}; \quad (1.18)$$

(1.12)-დან გვექნება

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) \cong \frac{1}{2h} u_{i0}(x_1, x_2, t) =: \frac{1}{2} v_{i0}(x_1, x_2, t). \quad (1.19)$$

(1.19)-ის გამო, (1.3) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$e_{ij0}(x_1, x_2, t) = \frac{h}{2} (v_{i0,j} + v_{j0,i}). \quad (1.20)$$

აქედან

$$e_{\alpha\beta 0}(x_1, x_2, t) = \frac{h}{2} (v_{\alpha 0,\beta} + v_{\beta 0,\alpha}),$$

$$e_{330} = 0^*), \quad e_{\alpha 30} = \frac{h}{2} v_{30,\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

მართლაც,

$$e_{i\beta 0}(x_1, x_2, t) = \int_{\overset{(+)}{h}(x_1, x_2)}^{\overset{(-)}{h}(x_1, x_2)} e_{i\beta}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = \frac{1}{2} \left[\int_{\overset{(+)}{h}(x_1, x_2)}^{\overset{(-)}{h}(x_1, x_2)} u_{i,\beta}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 + \int_{\overset{(-)}{h}(x_1, x_2)}^{\overset{(+)}{h}(x_1, x_2)} u_{\beta,i}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\beta} \int_{\overset{(-)}{h}(x_1, x_2)}^{\overset{(+)}{h}(x_1, x_2)} u_i(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 - u_i \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t \right) \overset{(+)}{h}_{,\beta}(x_1, x_2) \right.$$

$$\left. + u_i \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right) \overset{(-)}{h}_{,\beta}(x_1, x_2) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \int_{\overset{(-)}{h}(x_1, x_2)}^{\overset{(+)}{h}(x_1, x_2)} u_\beta(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 - u_\beta \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t \right) \overset{(+)}{h}_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ & + u_\beta \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right) \overset{(-)}{h}_{,\alpha}(x_1, x_2), \quad i = \alpha, \\ & u_\beta \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t \right) - u_\beta \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right), \quad i = 3. \end{aligned} \right. \quad (1.21)$$

აქედან, თუ მხედველობაში მივიღებთ (1.19)-ს,

*) ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით, (1.18)-დან, ცხადია,

$$X_{330}(x_1, x_2, t) = \lambda e_{\alpha\alpha 0}(x_1, x_2, t) \quad \text{და} \quad X_{330} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} X_{\alpha\alpha 0} = \nu X_{\alpha\alpha 0},$$

სადაც ν პუასონის კოეფიციენტი.

$$e_{i\beta 0}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2} \left[u_{i0, \beta}(x_1, x_2, t) - \frac{1}{2} \frac{\hbar_{, \beta}^{(+)}}{\hbar} u_{i0}(x_1, x_2, t) + \frac{1}{2} \frac{\hbar_{, \beta}^{(-)}}{\hbar} u_{i0}(x_1, x_2, t) \right] \\ + \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & u_{\beta 0, \alpha}(x_1, x_2, t) - \frac{1}{2} \frac{\hbar_{, \alpha}^{(+)}}{\hbar} u_{\beta 0}(x_1, x_2, t) + \frac{1}{2} \frac{\hbar_{, \alpha}^{(-)}}{\hbar} u_{\beta 0}(x_1, x_2, t), \quad i = \alpha, \\ & \frac{1}{2\hbar} u_{\beta 0}(x_1, x_2, t) - \frac{1}{2\hbar} u_{\beta 0}(x_1, x_2, t) = 0, \quad i = 3, \end{aligned} \right.$$

საიდანაც

$$e_{\alpha\beta 0} = \frac{1}{2} \left[u_{\alpha 0, \beta} + u_{\beta 0, \alpha} - \frac{\hbar_{, \beta}}{\hbar} u_{\alpha 0} - \frac{\hbar_{, \alpha}}{\hbar} u_{\beta 0} \right] = \frac{\hbar}{2} (v_{\alpha 0, \beta} + v_{\beta 0, \alpha})$$

რადგან

$$(v_{\alpha 0})_{, \beta} = \left(\frac{1}{\hbar} u_{\alpha 0} \right)_{, \beta} = \frac{1}{\hbar} u_{\alpha 0, \beta} - \frac{\hbar_{, \beta}}{\hbar^2} u_{\alpha 0};$$

ანალოგიურად,

$$e_{3\beta 0} = \frac{\hbar}{2} v_{30, \beta}. \quad (1.22)$$

ცხადია,

$$e_{330}(x_1, x_2, t) = \int_{\frac{(-)}{\hbar}(x_1, x_2)}^{\frac{(+)}{\hbar}(x_1, x_2)} e_{33}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = \int_{\frac{(-)}{\hbar}(x_1, x_2)}^{\frac{(+)}{\hbar}(x_1, x_2)} u_{3,3}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = u_3 \left(x_1, x_2, \frac{(+)}{\hbar}(x_1, x_2), t \right) \\ - u_3 \left(x_1, x_2, \frac{(-)}{\hbar}(x_1, x_2), t \right). \quad (1.23)$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ (1.19)-ს, გვექნება, რომ

$$e_{330}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\hbar} u_{30}(x_1, x_2, t) - \frac{1}{2\hbar} u_{30}(x_1, x_2, t) = 0.$$

თუ (1.20)-ს ჩავსვამთ (1.18)-ში და მიღებულს კი (1.17)-ში, გვექნება

$$\mu \left[(hv_{i0, \beta})_{, \beta} + (hv_{\beta 0, i})_{, \beta} \right] + \lambda \delta_{i\beta} (hv_{\gamma 0, \gamma})_{, \beta} \\ + Q_{v_i^{(+)}} \sqrt{\left(\frac{(+)}{\hbar_1} \right)^2 + \left(\frac{(+)}{\hbar_2} \right)^2 + 1} + Q_{v_i^{(-)}} \sqrt{\left(\frac{(-)}{\hbar_1} \right)^2 + \left(\frac{(-)}{\hbar_2} \right)^2 + 1} + \Phi_{i0} = \rho \hbar \ddot{v}_{i0}, \quad i = 1, 2, 3.$$

კერძოდ, როცა $i = \alpha$,

$$\mu \left[(hv_{\alpha 0, \beta})_{, \beta} + (hv_{\beta 0, \alpha})_{, \beta} \right] + \lambda \delta_{\alpha\beta} (hv_{\gamma 0, \gamma})_{, \beta}$$

$$+ \mathcal{Q}_{\nu \alpha}^{(+)} \sqrt{\left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2} + 1 + \mathcal{Q}_{\nu \alpha}^{(-)} \sqrt{\left(h_{,1}^{(-)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)}\right)^2} + 1 + \Phi_{\alpha 0} = \rho h \ddot{v}_{\alpha 0}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (1.24)$$

ხოლო, როცა $i = 3$,

$$\mu(hv_{30,\beta})_{,\beta} + \mathcal{Q}_{\nu 3}^{(+)} \sqrt{\left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2} + 1 + \mathcal{Q}_{\nu 3}^{(-)} \sqrt{\left(h_{,1}^{(-)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)}\right)^2} + 1 + \Phi_{30} = \rho h \ddot{v}_{30,\alpha}. \quad (1.25)$$

2. წამახვილებული ფირფიტა

2.1. უსასრულობაში ქრობადი სისქის ფირფიტა

იერარქიული მოდელების ნულოვან მიახლოებაში

(1.24), (1.25) სისტემა სტატიკის შემთხვევაში ფირფიტისთვის მიიღებს შემდეგ სახეს (იხ. მაგ. [21], [1])

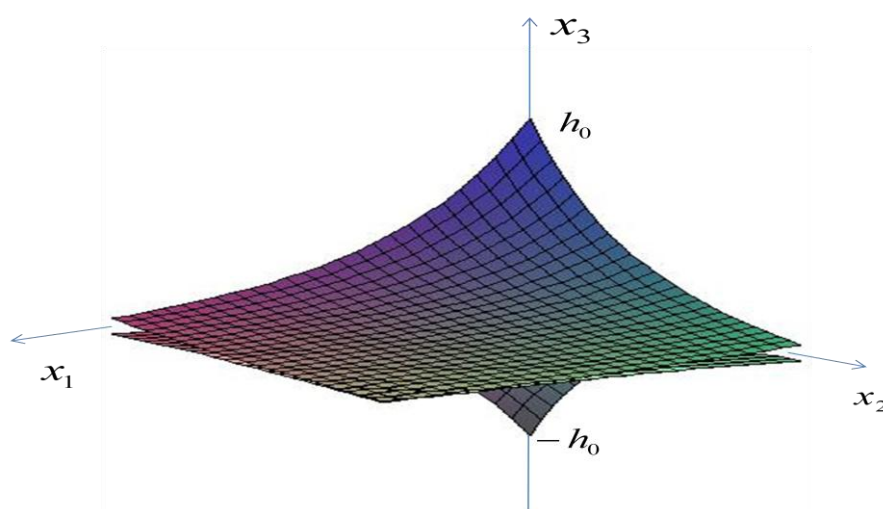
$$\mu \left[(h\nu_{\alpha 0, \beta})_{, \beta} + (h\nu_{\beta 0, \alpha})_{, \beta} \right] + \lambda \delta_{\alpha \beta} (h\nu_{\gamma 0, \gamma})_{, \beta} + (Q_{\nu \alpha}^{(+)} + Q_{\nu \alpha}^{(-)}) \sqrt{\left(h_{,1} \right)^2 + \left(h_{,2} \right)^2} + 1 + \Phi_{\alpha 0} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.1)$$

$$\mu (h\nu_{30, \beta})_{, \beta} + (Q_{\nu 3}^{(+)} + Q_{\nu 3}^{(-)}) \sqrt{\left(h_{,1} \right)^2 + \left(h_{,2} \right)^2} + 1 + \Phi_{30} = 0. \quad (2.2)$$

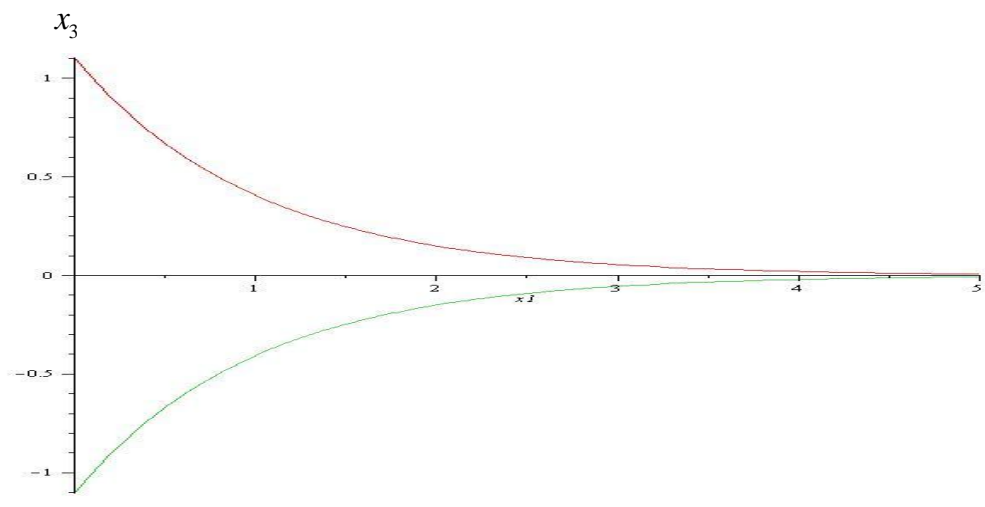
ვიხილავთ ისეთ წამახვილებულ ფირფიტას, რომლის სისქის ნახევარი იცვლება შემდეგი კანონით:

$$h = h_0 e^{-\kappa(x_1 + x_2)}, \quad h_0 = \text{const} > 0, \quad \kappa = \text{const} \geq 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (2.3)$$

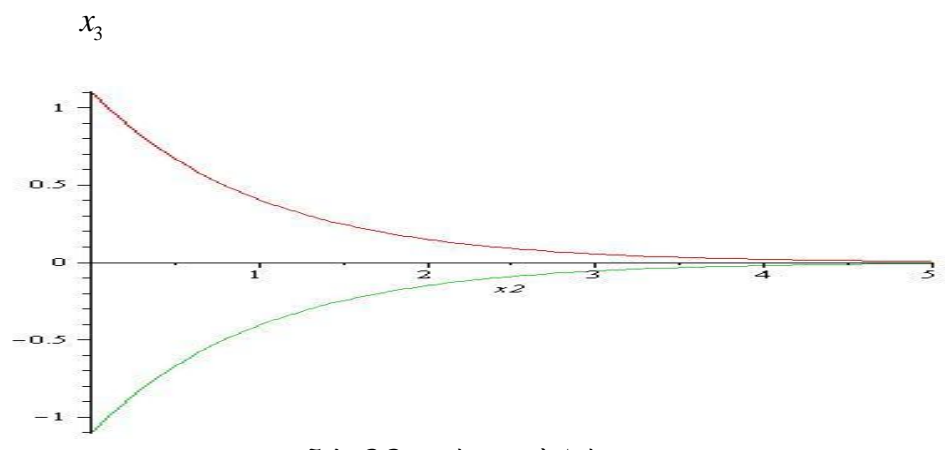
შესაბამისი ფირფიტის ზედა და ქვედა ზედაპირები მოცემულია ნახ.2.1-ზე, ნახ.2.2 და ნახ.2.3 მოცემულია ფირფიტის პროფილები შესაბამისად Ox_1x_3 და Ox_2x_3 სიბრტყეებში. ფირფიტის გეგმილი Ox_1x_2 სიბრტყეზე მოცემულია ნახ. 2.4-ზე.



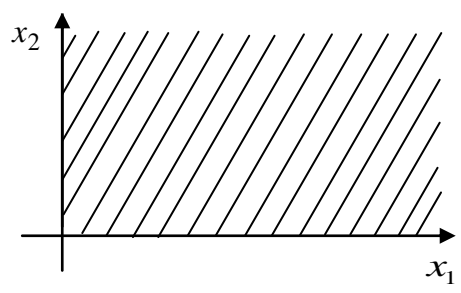
ნახ. 2.1 წამახვილებული ფირფიტის ზედა და ქვედა ზედაპირები



ნახ. 2.2 ფირფიტის პროფილი



ნახ. 2.3 ფირფიტის პროფილი



ნახ.2.4 ფირფიტის გეგმილი

(2.3)-ის გათვალისწინებით (2.1)–(2.2) სისტემა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$(\lambda + 2\mu)h_0 e^{-\kappa(x_1+x_2)} (-\kappa v_{10,1} + v_{10,11}) + \mu h_0 e^{-\kappa(x_1+x_2)} (-\kappa v_{10,2} + v_{10,22} - \kappa v_{20,1} + v_{20,12}) - \lambda h_0 e^{-\kappa(x_1+x_2)} [\kappa v_{20,2} - v_{20,21}] + F_{10} = 0, \quad (2.4)$$

$$(\lambda + 2\mu)h_0 e^{-\kappa(x_1+x_2)} (-\kappa v_{20,2} + v_{20,22}) + \mu h_0 e^{-\kappa(x_1+x_2)} [-\kappa v_{10,2} + v_{10,21} - \kappa v_{20,1} + v_{20,11}] - \lambda h_0 e^{-\kappa(x_1+x_2)} [\kappa v_{10,1} - v_{10,12}] + F_{20} = 0, \quad (2.5)$$

$$\mu e^{-\kappa(x_1+x_2)} (v_{30,11} + v_{30,22} - \kappa v_{30,1} - \kappa v_{30,2}) + F_{30} = 0. \quad (2.6)$$

სადაც

$$F_{\alpha 0} = (Q_{v\alpha}^{(+)} + Q_{v\alpha}^{(-)}) \sqrt{\left(h_{,1}\right)^2 + \left(h_{,2}\right)^2} + 1 + \Phi_{\alpha 0}, \quad (2.7)$$

$$F_{30} = (Q_{v3}^{(+)} + Q_{v3}^{(-)}) \sqrt{\left(h_{,1}\right)^2 + \left(h_{,2}\right)^2} + 1 + \Phi_{30}. \quad (2.8)$$

ვიხილავთ (2.6) განტოლებას და მის ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სასაზღვრო პირობებისა

$$v_{30}(x_1^0, x_2^0) = 0, \quad (x_1^0, x_2^0) \in \partial\omega, \quad (2.9)$$

უსასრულობაში შემდეგი პირობის გათვალისწინებით

$$v_{30}(x) = O(e^{\kappa(x_1+x_2)}), \text{ როცა } |x| \rightarrow \infty, \text{ სადაც } x := (x_1, x_2), \quad (2.10)$$

სადაც

$$v_{30} \in C^2(\omega) \cap C(\bar{\omega}), \quad F_{30} \in C([0, l]),$$

$$\omega := \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 < +\infty; \quad 0 \leq x_2 < +\infty\}.$$

2.2. სასრული სიგრძისა და სიგანის ფირფიტის ლუნვის ამოცანა

გადავწეროთ (2.6) შემდეგი სახით

$$Lv = F, \quad (2.11)$$

სადაც

$$L := -\mu e^{-\kappa(x_1+x_2)} \Delta + \mu \kappa e^{-\kappa(x_1+x_2)} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

და

$$F := F_{30}, \quad v := v_{30}.$$

განვიხილოთ (2.11) განტოლება

$$\omega_l := \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq l; \quad 0 \leq x_2 \leq l\}$$

არეში,

$$l = \text{const} > 0.$$

ვეძებთ (2.11) განტოლების ამონახსნი

$$v \in C^2(\omega_l) \cap C(\overline{\omega_l})$$

კლასში ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობით:

$$v|_{\partial\omega_l} = 0.$$

ავილოთ ნებისმიერი v^* ფუნქცია იმავე კლასიდან სადაც ამონახსნს ვეძებთ და დავწეროთ გრინის ფორმულა

$$\begin{aligned} \int_{\omega_l} Lv v^* d\omega_l &= - \int_{\omega_l} \mu (e^{-\kappa(x_1+x_2)} v_{,\beta})_{,\beta} v^* d\omega_l = \\ &= \int_{\omega_l} \mu e^{-\kappa(x_1+x_2)} v_{,\beta} v_{30}^* d\omega_l = \int_{\omega_l} F v^* d\omega_l. \end{aligned}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$B(v, v^*) := \int_{\omega_l} \mu e^{-\kappa(x_1+x_2)} v_{,\beta} v_{,\beta}^* d\omega_l.$$

(1.22)–ის და (1.18)–ის თანახმად, რადგან $X_{3\beta 0} = 2\mu e_{3\beta 0}$,

$$B(v, v^*) = \frac{4\mu}{h_0} \int_{\omega_l} e^{\kappa(x_1+x_2)} e_{3\beta 0}(v) e_{3\beta 0}(v^*) d\omega_l = \frac{2}{h_0} \int_{\omega_l} e^{\kappa(x_1+x_2)} X_{3\beta 0}(v) e_{3\beta 0}(v^*) d\omega_l, \quad (2.12)$$

სადაც $e_{3\beta 0}$ და $X_{3\beta 0}$ არის შესაბამისად დეფორმაციისა და ძაბვის ტენზორის კომპონენტები $N = 0$ მიახლოებაში.

$B(v, v^*)$ ორადწრფივი ფორმა დადებითად განსაზღვრულია, მართლაც

$$B(v, v) = \frac{4\mu}{h_0} \int_{\omega_l} e^{\kappa(x_1+x_2)} e_{3\beta 0}^2(v) d\omega_l > 0.$$

როცა $B(v, v) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $e_{3\beta 0}(v) \equiv 0$, $v \equiv const$ ანუ დეფორმაციები არ გვაქვს.

განვსაზღვროთ X^κ სივრცე შემდეგი სკალარული ნამრავლისა და ნორმის საშუალებით:

$$(v, v^*)_{X^\kappa} = \frac{4\mu}{h_0} \int_{\omega_l} e^{\kappa(x_1+x_2)} e_{3\beta 0}(v) e_{3\beta 0}(v^*) d\omega_l, \quad (2.13)$$

$$\|v\|_{X^\kappa}^2 = \frac{h_0}{4} \int_{\omega_l} e^{-\kappa(x_1+x_2)} v_{,\beta} v_{,\beta} d\omega_l. \quad (2.14)$$

X^κ ჰილბერტის სივრცეა.

ამოცანის სუსტი ფორმულირება: ვიპოვოთ ისეთი $v \in X^\kappa$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას

$$B(v, v^*) = \langle F^1, v^* \rangle, \forall v^* \in X^\kappa, F^1 \in [X^\kappa]^*. \quad (2.15)$$

ლაქს-მილგრამის ლემა: თუ $L(v)$ არის შემოსაზღვრული ანტიწრფივი ფუნქციონალი, განსაზღვრული X^κ ჰილბერტის სივრცეზე, ხოლო $B(v, v^*)$ – მისი შესაბამისი ორადწრფივი ფორმა, რომელიც აკმაყოფილებს

$$|B(v, v^*)| \leq C \|v\|_{X^\kappa} \cdot \|v^*\|_{X^\kappa}, \forall v, v^* \in X^\kappa$$

შემოსაზღვრულობის და

$$B(v, v^*) \geq C_0 \|v\|_{X^\kappa}^2,$$

კოერციტიულობის პირობებს, სადაც C და C_0 დადებითი მუდმივებია, მაშინ

$$B(v, v^*) = L(v) \quad \forall v \in X^\kappa$$

ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $v \in X^\kappa$ ისეთი, რომ

$$\|v\| \leq c \|L\|_*,$$

სადაც $\|\cdot\|_*$ არის ნორმა X^κ -ის დუალურ $[X^\kappa]^*$ სივრცეში, ხოლო c დადებითი

მუდმივია. კერძოდ, შეიძლება ავიღოთ $c = \frac{C}{C_0}$.

ჩვენს შემთხვევაში (2.14)–დან, ცხადია,

$$B(v, v^*) \geq C_0 \|v\|_{X^\kappa}^2. \quad (2.16)$$

ვაჩვენოთ, რომ $B(v, v^*)$ ორადწორფივი ფორმა შემოსაზღვრულია. ამისათვის უნდა დავამტკიცოთ, რომ სრულდება შემდეგი უტოლობა:

$$|B(v, v^*)| \leq C \|v\|_{X^\kappa} \cdot \|v^*\|_{X^\kappa}, \quad \forall v, v^* \in X^\kappa. \quad (2.17)$$

გადავიდეთ სამგანზომილებიან არეზე

$$\Omega := \{(x; x_3) : x \in \omega_l, \quad -h < x_3 < h\}, \text{ სადაც } x := (x_1, x_2),$$

$$u_3(x; x_3) = \frac{1}{2} v(x),$$

$$u_3^*(x; x_3) = \frac{1}{2} v^*(x),$$

$$B(u_3, u_3^*) = 4 \int_{\Omega} X_{3j}(u_3) e_{3j}(u_3^*) d\Omega = B(v, v^*).$$

ჰუკის კანონის $X_{3j} = \lambda e_{33} \delta_{3j} + 2\mu e_{3j}$ გამოყენებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} |B(v, v^*)|^2 &= |B(u_3, u_3^*)|^2 = \left| \int_{\Omega} \{2\mu e_{3j}(u_3) + \lambda \delta_{3j} e_{33}(u_3)\} e_{3j}(u_3^*) d\Omega \right|^2 \leq \\ &\leq C_1 \int \sum_{\omega_l, \beta=1}^2 e_{3\beta 0}^2(v) \frac{d\omega_l}{2h} \cdot \int \sum_{\omega_l, \beta=1}^2 e_{3\beta 0}^2(v^*) \frac{d\omega_l}{2h} = C_1 \|v\|_{X^\kappa}^2 \cdot \|v^*\|_{X^\kappa}^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

(2.18)–ის გათვალისწინებით $B(v, v^*)$ ორადწორფივი ფორმა აკმაყოფილებს (2.16) და (2.17) პირობებს, ამიტომ ლაქს–მილგრამის ლემის ძალით (2.14)–ს X^κ კლასში აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

შევნიშნოთ, რომ $X^\kappa(\omega_l) \equiv W_2^1(\omega_l)$, სადაც $W_2^1(\omega_l)$ –თი აღინიშნება ისეთი ჰილბერტის სივრცე, რომლის ელემენტები ეკუთვნის $L_2(\omega_l)$ –ს და აქვს განზოგადებული წარმოებულები ω_l არეში, რომლებიც აგრეთვე ეკუთვნის $L_2(\omega_l)$ –ს, და სადაც სკალარული ნამრავლი მოცემულია

$$(u, v)_{W_2^1(\omega_l)} = \int_{\omega_l} u_{,\beta} \cdot v_{,\beta} d\omega_l$$

ტოლობით.

რადგანაც $v \in W_2^1(\omega_l)$ ფუნქცია უწყვეტია $\bar{\omega}_l$ –ში, მაშინ მისი კვალი $\partial\omega_l$ –ზე ემთხვევა მის შეზღუდვას $\partial\omega_l$ –ზე (იხ. [1]).

2.3. უსასრულობაში ქრობადი სისქის ფირფიტის ლუნვის ამოცანა

განვიხილოთ (2.6), (2.9) ამოცანა. (2.6) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$v_{30,11} + v_{30,22} - \kappa v_{30,1} - \kappa v_{30,2} = F, \quad (2.19)$$

სადაც $F := -\frac{1}{\mu} F_{30} e^{\kappa(x_1+x_2)}$ და $\kappa > 0$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = x_1 - ix_2$, მაშინ (2.19) განტოლება ახალ ცვლადებში გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$L(U(z, \zeta)) = \frac{\partial^2 U(z, \zeta)}{\partial z \partial \zeta} + A \frac{\partial U(z, \zeta)}{\partial z} + B \frac{\partial U(z, \zeta)}{\partial \zeta} - F_1(z, \zeta) = 0, \quad (2.20)$$

(2.9) სასზღვრო პირობა გადაიწერება შემდეგი ფორმით

$$U(z, \zeta_0) = 0, \quad U(z_0, \zeta) = 0, \quad (2.21)$$

სადაც

$$\begin{aligned} A &:= -\frac{\kappa}{4}(1+i), & B &:= -\frac{\kappa}{4}(1-i), \\ U &:= v_{30}(x_1, x_2), & F_1 &:= F(x_1, x_2). \end{aligned}$$

(2.20) განტოლების შეუღლებულ ერთგვაროვან განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$L^*(V(z, \zeta)) = \frac{\partial^2 V(z, \zeta)}{\partial z \partial \zeta} - A \frac{\partial V(z, \zeta)}{\partial z} - B \frac{\partial V(z, \zeta)}{\partial \zeta} = 0.$$

რიმანის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$V := R(z, \zeta; t, \tau) = e^{-\frac{\kappa}{2}(1+i)(\zeta-\tau) - \frac{\kappa}{2}(1-i)(z-t)}.$$

დასმული ამოცანის ამონახსნი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით (იხ. [29], [30]):

$$U(z, \zeta) = \int_{z_0}^z \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{\frac{\kappa}{2}(1+i)(\zeta-\tau) + \frac{\kappa}{2}(1-i)(z-t)} \cdot F_1(t, \tau) d\tau dt, \quad (2.22)$$

სადაც $z_0 = x_1^0 + ix_2^0$, $\zeta_0 = x_1^0 - ix_2^0$, $(x_1^0, x_2^0) \in \partial\omega$.

შემთხვევა 1. ვთქვათ $F_1(t, \tau) \equiv 1$, მაშინ (2.22) ფორმულით მოცემული ამონახსნი გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}
U(z, \zeta) &= \int_{z_0}^z e^{\frac{\kappa}{2}(1-i)(z-t)} dt \cdot \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{\frac{\kappa}{2}(1+i)(\zeta-\tau)} d\tau = \\
&= \frac{4}{\kappa^2(1-i)(1+i)} \left[1 - e^{\frac{\kappa}{2}(1-i)(z-z_0)} \right] \cdot \left[1 - e^{\frac{\kappa}{2}(1+i)(\zeta-\zeta_0)} \right] = \\
&= \frac{2}{\kappa^2} \left[1 - e^{\frac{\kappa}{2}(1-i)(z-z_0)} \right] \cdot \left[1 - e^{\frac{\kappa}{2}(1+i)(\zeta-\zeta_0)} \right].
\end{aligned} \tag{2.23}$$

თუ დავუბრუნდებით x_1, x_2 ცვლადებს და შევაფასებთ $|v_{30}(x_1, x_2)|$, მივიღებთ

$$\begin{aligned}
&|v_{30}(x_1, x_2)| \\
&\leq \frac{4}{\kappa^2} \cdot \left[1 + 2 \left| e^{-\frac{\kappa}{2}(x_1-x_1^0+x_2-x_2^0)} \right| \left| \cos\left(\frac{\kappa}{2}(x_1-x_1^0-x_2+x_2^0)\right) \right| + \left| e^{-\kappa(x_1-x_1^0+x_2-x_2^0)} \right| \right].
\end{aligned} \tag{2.24}$$

(2.24)- დან გამომდინარეობს, რომ

$$v_{30}(x) = O(e^{\kappa(x_1+x_2)}), \text{ როცა } |x| \rightarrow \infty.$$

შემთხვევა 2. ვთქვათ, $F_1(t, \tau)$ ნებისმიერი შემოსაზღვრული ფუნქციაა ($|F_1(t, \tau)| \leq M = \text{const} < \infty$) მაშინ

$$\begin{aligned}
|U(z, \zeta)| &= \left| \int_{z_0}^z \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{\frac{\kappa}{2}(1+i)(\zeta-\tau) + \frac{\kappa}{2}(1-i)(z-t)} \cdot F_1(t, \tau) d\tau dt \right| \leq \\
&\leq \int_{z_0}^z \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left| e^{\frac{\kappa}{2}(1+i)(\zeta-\tau) + \frac{\kappa}{2}(1-i)(z-t)} \right| \cdot |F_1(t, \tau)| d\tau dt \leq \\
&\leq M \cdot \int_{z_0}^z \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{\frac{\kappa}{2}(1+i)(\zeta-\tau) + \frac{\kappa}{2}(1-i)(z-t)} d\tau dt.
\end{aligned}$$

ამრიგად (2.22) ფორმულით მოცემული გამოსახულება წარმოადგენს დასმული ამოცანის ამონახსნს.

დასკვნა

შესწავლილია ისეთი ექსპონენციალურად წამახვილებული პრიზმული გარსის ღუნვის ამოცანა, რომლის ნახევარსისქე იცვლება შემდეგი კანონით

$$h = h_0 e^{-\kappa(x_1+x_2)}, \quad h_0 = \text{const} > 0, \quad \kappa = \text{const} \geq 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

განხილულია ორი შემთხვევა:

I. როცა გარსის გეგმილი Ox_1x_2 სიბრტყეზე არის

$$\omega_l = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq l; 0 \leq x_2 \leq l\},$$

დამტკიცებულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები

$X^\kappa(\omega_l) \equiv W_2^1(\omega_l)$ სივრცეში.

II. როცა გარსის გეგმილი Ox_1x_2 სიბრტყეზე არის

$$\omega := \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 < +\infty; 0 \leq x_2 < +\infty\},$$

დასმული ამოცანის ამონახსნი აგებულია ინტეგრალური ფორმით, ხოლო კერძო შემთხვევაში ჩაიწერება ცხადი სახით.

ციტირებული ლიტერატურა

1. ჯაიანი გ., უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2004
2. Avalishvili G., Avalishvili M., Investigation of dynamical one-dimensional models for elastic rods with variable cross-sections. Bull. Georgian. Acad. Sci. 174 (3), 399–402, 2006
3. Avalishvili G., Avalishvili M., On a hierarchical model of elastic rods with variable cross-sections. Appl. Math. Inform. Mech. 9 (1), 1–16, 2004
4. Avalishvili G., Avalishvili M., On the investigation of one-dimensional models for thermoelastic beams. Bull. Georgian Acad. 3 (3), 25–32, 2009
5. Avalishvili M., Gordeziani D., Investigation of a hierarchical model of prismatic shells, Bull. Georgian Acad. Sci., 165 (3), 485–488, 2001
6. Avalishvili M., Gordeziani D., Investigation of two-dimensional models of elastic prismatic shells, Georgian Mathematical Journal, 10 (1), 17–36, 2003
7. Chinchaladze N., On some Nonclassical Problems for Differential Equations and Their Applications to the Theory of Cusped Prismatic Shells. Lecture Notes of TICMI, 9 (2008)
8. Chinchaladze N., Gilbert R.P., Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Existence and uniqueness theorems for cusped prismatic shells in the N-th hierarchical model, Mathematical Methods in Applied Sciences, 31 (11), 1345–1367, 2008, DOI 10.1002 /mma.975, for the electronic version see:
<http://www3.interscience.wiley.com/>
9. Chinchaladze N., Jaiani G., Maistrenko B., Podio-Guidugli P., Concentrated contact interactions in cuspidate prismatic shell-like bodies, Archive of Applied Mechanics, 81 (10), 1487–1505, 2011
10. Chinchaladze N., Gilbert R. P., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Cusped Elastic Beams under the Action of Stresses and Concentrated Forces. Applicable Analysis, 89 (5), 757–774, 2010, access: <http://www.tandf.co.uk/journals>

11. Gordeziani D., On the solvability of some boundary value problems for a variant of the theory of thin shells, Dokl. Akad. Nauk SSSR 215 (6), 1289-1292, 1974
12. Gordeziani D., To the accuracy of one variant of the theory of thin shells, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 215 (4), 751-754, 1974
13. Jaiani G., Application of Vekua's dimension reduction method to cusped plates and bars, Bull. TICMI, 5, 27-34, 2001
14. Jaiani G., Cusped Shell-like Structures Springer, Heidelberg-Dorbrecht-London-New York, 2011
15. Jaiani G., Elastic bodies with non-smooth boundaries – cusped plates and shells, ZAMM, 76 (2), 117-120, 1996
16. Jaiani G., On a mathematical model of bars with variable rectangular Cross-sections, ZAMM-Z. Angew. Math. Mech., 81 (3), 147-173, 2001
17. Jaiani G., Relation of hierarchical models of cusped elastic plates and shells to the three-dimensional models, Reports of Seminar of I.Vekua Inst. of Appl. Math., 28, 40-51, 2002
18. Jaiani G., Some remarks concerning cusped plates and beams, Transactions of the Georgian Technical University, 1 (447), 44-48, 2003
19. Jaiani G., Theory of Cusped Euler-Bernoulli beams and Kirchhof-Love plates, Lecture Notes of TICMI, 3, 2002
20. Jaiani G., Chinchaladze N., Cylindrical Bending of a Cusped Plate with Big Deflections, Journal of Mathematical Sciences, Springer, 157 (1), 52-69, 2009
21. Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Wendland W., Two-dimensional hierarchical models for prismatic shells with thickness vanishing at the boundary, Journal of Elasticity, 77 (2), 95-122, 2004
22. Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Wendland W.L., Hierarchical Models for Elastic Cusped Plates and Beams, Lecture Notes of TICMI, 4, 2003
23. Meunargia T., On one method of construction of geometrically and physically nonlinear theory of non-shallow shells, Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, Georgian Academy of Sciences, 119, 133-154, 1999

24. Mikhlin S.G., Variational Methods in Mathematical Physics. Nauka, Moscow, 1970
(Russian)
25. Vashakmadze T., The Theory of Anisotropic Plates, Kluwer Academic Publishers,
Dordrecht--London--Boston, 1999
26. Vekua I., Shell Theory: General Methods of Construction, Pitman Advanced
Publishing Program, Boston--London--Melburne, 1985
27. Vekua I.N., On a way of calculating of prismatic shells. Proceedings of A.Razmadze
Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences, 21, 191-259, 1955
(Russian)
28. Vekua I.N., The theory of thin shallow shells of variable thickness. Proceedings of
A. Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences, 30, 5-103,
1965 (Russian)
29. Бицадзе А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, МОСКВА
«НАУКА» ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ, 1981
30. Векуа И.Н., Некоторые общие методы построения различных вариантов теории
оболочек, Наука, Москва, 1982
31. Векуа И.Н., Новые методы решения эллиптических уравненийю. М. – Л,
Гостехиздат, 1948
32. Векуа И.Н., Об одном методе расчета призматических оболочек, Труды
Тбилисского математического института им. А.Размадзе Академии наук Грузии,
21, 191-259, 1955
33. Векуа И.Н., Теория тонких пологих оболочек переменной толщины, Труды
Тбилисского математического института им. А.Размадзе Академии наук Грузии,
30, 5-103, 1965
34. Джаиани Г.В., Решение некоторых задач для одного вырождающегося
эллиптического уравнения и их применения к призматическим оболочкам, Изд-
ство ТГУ, 6, 1982