ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა

ფაკულტეტი

სამაგისტრო პროგრამა: **მათემატიკა**

ანა გოგოლიშვილი

თემა: **ევროპული და ამერიკული ოფციონების ფასდადება ფინანსური ბაზრის ბინომურ მოდელში**

ნაშრომის მეცნიერ-ხელმძღვანელები: **ბესარიონ დოჭვირი**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,

თსუ ასოცირებული პროფესორი

პეტრე ბაბილუა -ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,

თსუ ასისტენტ პროფესორი

თბილისი

2016

შ ი ნ ა ა რ ს ი

ანოტაცია

სამაგისტრო ნაშრომში შესწავლილია ფინანსური ბაზრის ბინომური მოდელი,რომელიც შედგება ორი აქტივისაგან: B=(B_n) არის ობლიგაციები (საბანკო ანგარიში) და S=(S_n) არის აქციები. განვიხილავთ ფინანსური ბაზრის ბინომურ მოდელთან დაკავშირებულ საკითხებს.კერძოდ მოტანილი გვაქვს ბინომური მოდელი,ჩამოყალიბებულია საინვესტიციო პრობლემა და ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების ამოცანა. განხილული გვაქვს ასევე ბინომური ხეები და მოპასუხე პორტფელის პრონციპი, ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული ოფციონების ფასდადების ამოცანის საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები,ამერიკული ოფციონის ფასდადება და სამაქტივიანი ბაზრის საკითხები.

Annotation

In this master"s Thesis we have studied about probabilistic model of finansical market which consist of two activities: $B=(B_n)$ that is obligations and $S=(S_n)$ is promotion. We consider the issues of finansical market. to be more spesific there was probability model, we will investment issues and in European-style options pricing task. we will disscus abour probablity trees and difender's protfolio principle,standard purchase and sale of options pricing illustrative numerical examples, the American option pricing and three active market issues.

შესავალი

1. ბუნებაში ყველაფერი იცვლება სივრცესა და დროში. ეს ცვლილებები როგორც წესი, შემთხვევით ხასიათს ატარებს. მაგალითისთვის შეიძლება დავასახელოთ კარგად ცნობილი ბროუნის მოძრაობა, ფიზიკური, ქიმიური, ბიოლოგიური, სამედიცინო, ფსიქოლოგიური, სოციოლოგიური და სხვა სახის ცდების შედეგები, ნებისმიერი ეკონომიკური მაჩვენებელი, ფინანსური ნაკადების მახასიათებლები და უამრავი სხვა ცვლადი სიდიდე. საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ შემთხვევითი ხასიათის ცვლადი სიდიდის (შემთხვევითი სიდიდის) ცხადი ანალიზური წარმოდგენა ფუნქციის სახით ჩვენ არ შეგვიძლია, რადგან შეუძლებელია ცალსახად წინასწარ განვსაზღვროთ, თუ რა მნიშვნელობას მიიღებს ცდის შედეგად ასეთი ცვლადი სიდიდე. ამიტომ ამ ცვლადების ყოფაქცევის ანუ ბუნებაში მიმდინარე შემთხვევითი პროცესების შესწავლა და ანალიზი არსებითად ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდებით ხდება, რომლის საგანი სწორედ ამ პროცესების მათემატიკური ანალიზია. ასეთი მიდგომა გამოიყენება დღეს მეცნიერული კვლევისა და პრაქტიკული საქმიანობის თითქმის ყველა სფეროში.

კარგად არის ცნობილი, რომ თანამედროვე საბაზრო ეკონომიკაში ცენტრალური ადგილი ფულად-საკრედიტო პოლიტიკას უკავია. ამ პოლიტიკის მართვისა და კონტროლის ძირითადი ინსტრუმენტი ფინანსურ ბაზრებზე ფასიანი ქაღალდებით, მაგალითად: ობლიგაციებით, აქციებით ოპერაციებია. ეს ოპერაციები შეიცავს გარკვეულ რისკებს და საჭიროა ამ რისკების შესწავლა და ანალიზი. თავის მხრივ, ეს საკითხები მიეკუთვნება ფინანსების თეორიას, რომლის მათემატიკურ პრობლემატიკას იკვლევს ბოლო ათწლეულებში ინტენსიურად განვითარებადი სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა. შევნიშნავთ, რომ ასევე გარკვეულ რისკებთან არის დაკავშირებული სადაზღვევო საქმე, რომლის მათემატიკურ პრობლემატიკას შეისწავლის სადაზღვევო (აქტუალური) მათემატიკა. შევნიშნავთ, რომ ფულად-საკრედიტო პოლიტიკის მართვაში არსებითი მნიშვნელობა აქვს საბანკო (საფინანსო) და სადაზღვევო ინსტიტუტების ერთობლივ საქმიანობას.

ფინანსური ბაზრების სტრუქტურა საკმაოდ რთული ბუნებისაა და მისი ანალიზი დაკავშირებულია საინტერესო და მეტად რთულ მათემატიკურ ამოცანებთან. ასეთი ამოცანებია, მაგალითად, დროში დისკრეტულად და უწყვეტად ფუნქციონირებადი ფინანსური ბაზრების მოდელების შერჩევა და მასში შემავალი პარამეტრების სტატისტიკური შეფასება, აქციებისა და სხვა აქტივების ყიდვა-გაყიდვის კონტრაქტების (მაგალითად, ოფციონის, ფორვარდის, ფიუჩერსის) სამართლიანი ფასის დადგენა, ინვესტორის

ოპტიმალური სტრატეგიის აგება, საინვესტიციო პრობლემა, არბიტრაჟი და მრავალი სხვა. ამ ამოცანების გადაწყვეტა სწორედ ალბათურ - სტატისტიკური (სტოქასტური ანალიზის) მეთოდების გამოყენებით ხდება.

§ 1. ფინანსური ბაზრის ბინომური მოდელი და ევროპული ოფციონის ფასდადება

1.განვიხილოთ უმარტივესი (B,S)=(B_n, S_n) ფინანსური ბაზრის კარგად ცნობილი კოკსის,როსის და რუბენშტეინის დისკრეტული ბიმომური მოდელი,რომელიც ფუნქციონირებს დროის მომენტებში n=0,1,…,N, N<∞ და ის შედგება ორი აქტივისაგან: B=(B_n) არის ობლიგაციები (საბანკო ანგარიში) და S=(S_n) არის აქციები. აღნიშნული მოდელის თანახმად, B_n და S_n სიდიდეების მნიშვნელობები დროში მოიცემა შემდეგი რეკურენტული ტოლობების საშუალებით:

$$B_n=(1+r)\, B_{n-1}, \qquad B_0>0, \qquad (1.1)$$

$$S_n=(1+\rho_n)\, S_{n-1}, \qquad S_0>0, \qquad (1.2)$$

სადაც r>0 არის საპროცენტი განაკვეთი,რომელიც არ იცვლება დროში,ხოლო

$$\rho = (\rho_n)\ , n=0,1,\ldots,N$$

არის დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა.ამასთან ყოველი ρ_n შემთხვევითი სიდიდე იღებს ან a და ან b-ს ტოლ შესაძლო რიცხვით მნიშვნელობებს, a<b, შემდეგი ალბათობებით:

$$P(\rho_n = a) = p>0\ , \qquad (1.3)$$

$$P(\rho_n = b) = 1-p \qquad (1.4)$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ,ყოველი ρ_n შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს აქვს შემდეგი სახე:

ρ_n	b	a
$P\rho_n$	p	1-p

; n=0,1,…,N (1.5)

ცხრილი 1.1

შევნიშნოთ,რომ ჩვენთვის საინტერესოა განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევა:

$$a<r<b \qquad (1.6)$$

მართლაც,თუ r≤a, მაშინ ხელსაყრელია შევიძინოთ მხოლოდ აქციები,ხოლო თუ r≥ b, მაშინ ხელსაყრელია შევიძინოთ მხოლოდ ობლიგაციები ან თანხა დავდოთ საბანკო ანგარიშზე.

გარდა ამისა,შევნიშნოთ,რომ (1.1), (1.2) მოდელში B_n სიდიდე ითვლება ურისკო ფასიან ქაღალდად (საპროცენტო განაკვეთი r>0 მუდმივი სიდიდეა,არ ხდება ინფლაციის გათვალისწინება და სხვა),ხოლო S_n სიდიდე ითვლება რისკიან ფასიან ქაღალდად,რადგანაც აქციის ფასები დროში შემთხვევით იცვლება

2. წარმოვიდგინოთ ახლა ინვესტორი,რომლესაც დროის საწყის n=0 მომენტში გააჩნია გარკვეული საწყისი (თანხა) X_0 =x>0 და მას სურს (1.1) , (1.2) ფინანსური ბაზრის შესაძლებლობების გამოყენებით თავისი საწყისი კაპიტალი მომავალში,დროის N მომენტში გახადოს რაიმე f_N>0 თანხის ტოლი.ინვესტორის ამ სურვილს საინვესტიციო პრობლემა ეწოდება.

ინვესტორს შეუძლია თავისი საწყისი თანხა მთლიანად განათავსოს მხოლოდ ობლიგაციებში (საბანკო ანგარიშზე) ან მხოლოდ აქციებში. ინვესტორთა უმრავლესობა, როგორც წესი, თავისი საწყისი თანხის ნაწილს ათავსებს ობლიგაციებში,ნაწილს კი-აქციებში. ჩვენს სწორედ ამ შემთხვევას განვიხილავთ.

ვიგულისხმოთ,რომ დროის n=0 მომენტში ერთი ობლიგაციის ფასია B_0,ხოლო ერთი აქციის ფასი S_0 და ინვესტორმა შეიძინა შესაბამისად β_0 და γ_0 რაოდენობის ობლიგაცია და აქცია. ამასთან ერთად, ჩვენ ვუშვებთ,რომ β_0 და γ_0 სიდიდეები შეიძლება იყოს წილადი და უარყოფითი რიცხვებიც. მაგალითად, $\beta_0=\frac{3}{2}$ ნიშნავს,რომ ნაყიდია ნახევარი ობლიგაცია,ხოლო $\gamma_0=-\frac{1}{2}$ კი-ნასესხებია ნახევარი აქცია.

ადვილი მისახვედრია,რომ ინვესტორის საწყისი თანხა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$X_0 = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0 \qquad (1.9)$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ,ინვესტორის პორტფელი (სტრატეგია) საწყის n=0 მომენტში არის $\pi_0 = (\beta_0;\ \gamma_0)$,რომლის შესაბამისი თანხა მოიცემა (1.9) ტოლობით.დროის n=1 მომენტის დადგომამდე ინვესტორს გარკვეული მოსაზრებების გამო შეუძლია $\pi_0 = (\beta_0; \gamma_0)$ შეცვალოს ახალი $\pi_1 = (\beta_{1,}\gamma_1)$ პორტფელით,სადაც $\beta_{1,} \neq \beta_0$ და $\gamma_1 \neq \gamma_0$.ასეთ შემთხვევაში X_0 თანხა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$X_0 = \beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0 \qquad (1.10)$$

დროის n=1 მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით,ინვესტორის თანხა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$X_{1=} \beta_1 B_{1,} + \gamma_1 S_1 \qquad (1.11)$$

სავსებით ანალოგიურად დროის n-1 და n მომენტებში

$\pi_{n-1} = (\beta_{n-1}; \gamma_{n-1})$ და $\pi_n = (\beta_n; \gamma_n)$

ინვესტორის პორტფელების(სტრატეგიების) შესაბამისი თანხები შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$X_{n-1} = \beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1} \quad (1.12)$$

$$X_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} \quad (1.13)$$

$$X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n \quad (1.14)$$

ამრიგად,ინვესტორის რეალური X_n თანხა დროის n მომენტში მოიცემა (1.14) ტოლობით. X_n სიდიდეს n=0,1,…,N ინვესტორის კაპიტალის პროცესი ეწოდება. მის ფორმირებაში (განსაზღვრაში) მონაწილეობს ე.წ. თვითდაფინანსების პირობა,რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: ინვესტორის X_n კაპიტალის პროცესის ფორმირების დროს არ ხდება დამატებითი კაპიტალის არც შემოდინება და არც გადინება, ე.ი. ამ პროცესში მონაწილეობს მხოლოდ საწყისი კაპიტალი.სხვანაირად რომ ვთქვათ, ცვლილებები ობლიგაციების რაოდენობებში ხდება მხოლოდ აქციების რაოდენობებში ცვლილებების ხარჯზე და პირიქით.

ადგილი საჩვენებელია,რომ დროის n-1 მომენტიდან დროის n მომენტამდე ინვესტორის კაპიტალის ნაზრდი (ცვლილება) დროში ობლიგაციისა და აქციის ფასების დროში ნაზრდების საშუალებით (1.13) და (1.14) ტოლობების გამოყენებით შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\Delta X_n = X_n - X_{n-1} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n - \beta_n B_{n-1} - \gamma_n S_{n-1} = \beta_n (B_n - B_{n-1}) + \gamma_n (S_n - S_{n-1}) = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n. \quad (1.15)$$

იგივე ΔX_n ნაზრდი (1.12) და (1.13) ტოლობების გამოყენებით შეიძლება ჩავწეროთ,აგრეთვე,შემდეგი სახით

$$\Delta X_n = X_n - X_{n-1} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n - \beta_n B_{n-1} - \gamma_n S_{n-1} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n - \beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1} + \beta_n B_{n-1} - \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} - \gamma_n S_{n-1} = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n + \beta_n \Delta B_{n-1} + \gamma_n \Delta S_{n-1}, \quad (1.16)$$

სადაც $\Delta\beta_n = \beta_n - \beta_{n-1}$ და $\Delta\gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$ ობლიგაციების და აქციების რაოდენობების ნაზრდებია დროის n-1 მომენტიდან n მომენტამდე,შესაბამისად.

(1.16) და (1.15) ტოლობების გამოყენებით გვექნება თვითდაფინანსების შემდეგი პირობა :

$$B_{n-1} \Delta\beta_n + S_{n-1} \Delta\gamma_n = 0 \quad (1.17)$$

ჩავწეროთ თვითდაფინანსების (1.17) პირობა დროის n=1 და n=2 მომენტების შემთხვევაში.გვექნება შესაბამისად,

$$B_0\Delta\beta_1 + S_0\Delta\gamma_1 = 0 \tag{1.18}$$

$$B_0\Delta\beta_2 + S_0\Delta\gamma_2 = 0 \tag{1.19}$$

როგორც ზემოთ დავინახეთ, X_n კაპიტალის ფორმირება დაკავშირებულია ინვესტორის პორტფელების

$\pi = (\pi_n), \pi_{n=}(\beta_{n,}\ \gamma_n)$, n=0,1,….,N,

მიმდევრობასთან. ამის გათვალისწინებით X_n სიდიდეებსაც ჩავწერთ მიმდევრობის შემდეგი სახით: $X^\pi = (X_n^\pi)$, n=0,1,….,N.

გარდა ამისა, შევნიშნოთ,რომ X_n^π კაპიტალი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი ჯამის სახით:

$X_n^\pi = X_0 + \sum_{k=1}^{n}(\beta_k\Delta B_k + \gamma_k\Delta S_k)$.

ამასთან ერთად (1.17) პირობის გათვალისწინებით ამზობენ,რომ $\pi_{n=}(\beta_{n,}\ \gamma_n)$ პორტფელები აგებულია თვითდაფინანსების პრინციპით და ამ შემთვევაში $\pi_n = (\pi_n)$

პორტფელების მიმდევრობას თვითდაფინანსებადი ეწოდება.

ადვილი მისახვედრია,რომ საინვესტიციო პრობლემის გადაწყვეტა,ანუ ინვსტორის მიერ დროის N მომენტისთვის f_N თანხის დაგროვება გარკვეული რისკების გარდა დამოკიდებულია საწყის X_0=x თანხაზე და $\pi_n = (\pi_n)$ სტრატეგიაზე. ამასთან დაკავიშირებით საჭიროა შემოვიღოთ სპეციალური სტრატეგია-ე.წ. ჰეჯი (hedge) ,რაც ინგლისურად ღობეს (მესერს) ნიშნავს.შევნიშნოთ,რომ სიტყვა „ღობე" რისკისგან თავდაცვის აზრით იხმარება.ხშირად იხმარება აგრეთვე გამოთქმა-ჰეჯური სტრატეგია ან ჰეჯირებული სტრატეგია.

მოცემული X_0=x>0 საწყისი თანხისთვის და არაუარყოფითი f_N ფუნქციისათვის თვითდაფინანსებად $\pi_n = (\pi_n)$ სტრატეგიას ეწოდება ჰეჯი ან კიდევ (x, f_N)-ჰეჯი,თუ

$$X_0^\pi = X_0 = x, \quad X_N^\pi \geq f_N. \tag{1.20}$$

იმ შემთხვევაში,როცა

$$X_0^\pi = X_0 = x, \quad X_N^\pi = f_N \tag{1.21}$$

მაშინ $\pi_n = (\pi_n)$ სტრატეგიას ეწოდება მინიმალური ჰეჯი.

ამრიგად, ჰეჯი არის ისეთი სტრატეგია,რომლის საშუალებითაც X_0=x>0 საწყისი თანხის მქონე ინვესტორს ობლიგაციებისა და აქციების ყიდვა-გაყიდვით (სტრატეგიის სათანადოდ აგების შემთხვევაში) დროის ბოლო N მომენტში ექნება f_N-ზე არანაკლები თანხა.

აღვნიშნოთ $\prod(x, f_N)$ -ით ყველა (x, f_N)-ჰეჯის ერთობლიობა. სიდიდეს

C_N=min $\{x > 0;\ \prod(x, f_N)\ \neq \varphi\}$, (1.22)

სადაც φ ცარიელი სიმრავლეა. (ე.ი. ასეთი სიმრავლე,რომელიც არცერთ ელემენტს არ შეიცავს ეწოდება საინვესტიციო თანხა(ფასი). ამრიგად C_N არის ის უმცირესი (მინიმალური) საწყისი თანხა,რომელიც ინვესტორს აძლებს საინვესტიციო პრობლემის გადაწყვეტის საშუალებას,ანუ დროის ბოლო N მომენტში f_N თანხის მიღების გარანტიას.

შევნიშნოთ,რომ ჰეჯის (მინიმლური ჰეჯის) აგების პროცესს ჰეჯირებას უწოდებენ.

3. ფინანსურ ბაზარზე ერთ-ერთი პოპულარული ფასიანი ქაღალდია ე.წ. ოფციონი ანუ ოფციონური კონტრაქტი. იგი წარმოადგენს ორ მხარეს (ოფციონის გამყიდველსა და მყიდველს) შორის შეთანხმებას წინასწარ განსაზღვრულ პორობებში რაიმე ფინანსური ინსტრუმენტის ან საქონლის ყიდვა-გაყიდვის შესახებ.ოფციონური კონტრაქტის საგანი შეიძლება იყოს ობლიგაცია,აქცია,ვალუტა,ოქრო და სხვა.ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ აქცია ყიდვა-გაყიდვის ოფციონურ კონტრაქტებს.

ოფციონის მფლობელს (მყიდველს) აქვს უფლება მომავალში წინასწარ განსაზღვრულ დროს, ანუ ოფციონის აღსრულების (განაღდების) დროს იყიდოს ან გაყიდოს აქცია წინასწარ შეთანხმებულ ფასად,რომელსაც შეთანხმების ფასი ეწოდება.

ოფციონის გამყიდველი (ემიტენტი,ოფციონის გამომშვები) ვალდებულია საჭიროების შემთხვევაში შეასრულოს ოფციონური კონტრაქტით გათვალისწინებული პირობები.

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ აქციების ყიდვა-გაყიდვის ე.წ. ევროპული ტიპის ოფციონურ კონტრაქტებს. შევნიშნოთ,რომ სიტყვა „ევროპული“ მიუთითებს იმაზე,რომ ოფციონის განაღდება შეიძლება მხოლოდ კონტრაქტით წინასწარ განსაზღვრულ დროს.აგრეთვე შევნიშნოთ,რომ რადგან ვიხილავთ აქციების ყიდვა-გაყიდვის ოფციონებს,ამიტომ ოფციონური კონტარქტი წარმოაგენს აქციის ფასის გარკვეული ფუნქციას,რომელსაც გადახდის ფუნქცია ეწოდება.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა: max (x,y) -ით (იკითხევა მაქსიმუმ x და y რიცხვებს შორის) აღვნიშნოთ x და y რიცხვებს შორის უდიდესი,მაგალითად max(3,4)=4. ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი

$$f_N = f(S_N) = max(S_N - K, 0) \tag{1.23}$$

გადახდის ფუნქციით არის მეორადი ფასიანი ქაღალდი,რომელიც მის მფლობელს აძლევს უფლებას,იყიდოს ემიტენტისაგან აქცია მხოლოდ დროის ბოლო N მომენტში წინასაწრ შეთანხმებულ K>0 ფასად. თუ $S_N > K$, მაშინ ოფციონის მფლობელი გაანაღდებს ოფციონს ან იყიდის აქციას K ფასად,მყისვე გაყიდის მას S_N ფასად და მიიღებს მოგებას $f_N = S_N - K$. თუ $S_N \leq K$, მაშინ ოფციონის მფლობელი არ გაანაღდებს ოფციონს,რადგან ამ შემთხვევაში მას მოგება არ ექნება და მისი დანაკარგი იქნება ოფციონში გადახდილი თანხა.

ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი

$$f_N = f(S_N) = max(K - S_N, 0) \qquad (1.24)$$

გადახდის ფუნქციით არის მეორადი ფასიანი ქაღალდი,რომელიც მის მფლობელს აძლევს უფლებას,გაყიდოს აქცია მხოლოდ დროის ბოლო N მომენტში წინასწარ შეთანხმებული K>0 ფასად. თუ $S_N < K$ მაშინ ოფციონის მფლობელი იყიდის აქციას S_N *ფასად, მყისვე გაყიდის მას* K ფასად და მიიღებს მოგებას $f_N = K - S_N$. თუ $S_N \geq K$,მაშინ ოფციონის მფლობელი არ გაანაღდებს ოფციონს, რადგან ამ შემთხვევაში მას მოგება არ ექნება და მისი დანაკარგი იქნება ოფციონში გადახდილი თანხა.

შევნიშნოთ,რომ მაგალითად,ყიდვის სტანდარტული ოფციონის მფლობელის რეალური მოგება $S_N > K$ შემთხვევაში ტოლი იქნება $S_N - K$ სიდიდეს გამოკლებული ოფციონში გადახდილი თანხა,ანუ $S_N - K$-C_N სიდიდე.

ემიტენტის წინაშე დგას შემდეგი ამოცანა.ოფციონის გაყიდვით მიღებული თანხა მან ისე უნდა გამოიყენოს ფინანსური ბაზრის შესაძლებლობების გათვალისწინებით,რომ დროის ბოლო N მომენტში მას გააჩნდეს ზუსტად f_N -ის ტოლი ან $f_N -$ *ზე* არანაკლები თანხა.სხვანაირად რომ ვთქვათ, ემიტენტმა უნდა ააგოს მინიმალური ჰეჯი ან ჰეჯი,რომ აუცილებლობის შეთხვევაში შეძლოს ოფციონური კონტრაქტის პირობების შესრულება.

ამრიგად,ოფციონის გაყიდვით მიღებული თანხით ემიტენტი ფინანსურ ბაზარზე გამოდის როგორც ინვესტორი.

ბუნებრივია, რომ ოფციონის ფასი არ შეიძლება იყოს ძალიან დიდი ან ძალიან პატარა.პირველ შემთხვევაში ემიტენტი უბრალოდ ვერ გაყიდის ოფციონს ან დარჩება ურისკო მოგება,ხოლო მეორე შემთხვევაში მან შეიძლება ვერ შეძლოს ოფციონური კონტრაქტის პირობების შესრულება.ამ სიტუაციების გათვალისწინებით,ევროპული ტიპის ოფციონის ფასად მიღებულია სწორედ (1.22) ტოლობით განმარტებული C_N სიდიდე,რომელსაც ოფციონის სამართლიანი ფასი ეწოდება.

ჩამოვაყალიბოთ ახლა ევროპული ტიპის (ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული) ოფციონების გათვლის ამოცანა. იგი მდგომარეობს შემდეგი სამი საკითხის გადაწყვეტაში:

1. ოფციონის C_N სამართლიანი ფასის დადგენა;

2. მინიმალური (x, f_N)-ჰეჯის აგება,ანუ ისეთი

   $\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$, n=1,…,N,

სტრატეგიის აგება,რომლისთვისაც სრულდება (1.21) პირობა;

3. π_n^* სტრატეგიის შესაბამისი $X_n^{\pi^*}$ კაპიტალის პროცესის განსაზღვრა.

შევნიშნოთ,რომ ოფციონის ერთ-ერთი ძირითადი მიმზიდველობა მდგომარეობს იმაში,რომ იგი იაფი ღირს და მისი საშუალებით შეიძლება (გარკვეული რისკის ხარჯზე) დიდი მოგების მიღება.

4.ევროპული ტიპის ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული ოფციონების (1.23) და (1.24) გადახდის ფუნქციები დამოკიდებულია დროის ბოლო N მომენტში აქციის S_N ფასის მნიშვნელობაზე.

§2 ბინომური ხეები

1.ფინანსური ბაზრის (1.1) , (1.2) ბინომური მოდელის შემთხვევაში აქციის შესაძლო ფასების,ოფციონის მიმდინარე ფასების (გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობების) აღწერისათვის, აგრეთვე ოფციონის სამართლიანი ფასის დადგენისათვის გამოიყენება ე.წ. ბინომური ხეები.

ჩვენ დაწვრილებით განვიხილავთ ერთნაბიჯიანი და ორნაბიჯიანი ბინომური ხეების აგების საკითხებს,რადგან სწორედ ამ შემთხვევებისათვის იქნება მოყვანილი სტანდარტული ოფციონების გათვლის რიცხვითი მაგალითები. მოკლედ შევეხებით აგრეთვე (N-ნაბიჯიანი) ბინომური ხის აგების საკითხს.

გავიხსენოთ,რომ (1.8) დამოკიდებულების თანახმად (1.1), (1.2) მოდელის პარამეტრები აკმაყოფილებენ პირობებს: -1<a<r<b. აქედან ჩანს,რომ a პარამტრი შეიძლება იყოს როგორც უარყოფითი,ასევე ნულის ტოლი ან დადებითი. ამის გათვალისწინებით დროის ყოველ n=1,…,N, გვექნება შემდეგი სამი შემთხვევიდან ერთ-ერთი:

1. თუ a<0, მაშინ აქციის ერთი შესაძლო ფასი ნაკლები,ხოლო მეორე შესაძლო ფასი მეტი იქნება აქციის წინა ფასზე. მაგალითად

   $S_0 > S_1$=(1+a) S_0, $S_0 < S_1$=(1+b) S_0.
2. თუ a=0, მაშინ აქციის ერთი შესაძლო ფასი არ შეიცვლება,ხოლო მეორე შესაძლო ფასი მეტი იქნება აქციის წინა ფასზე. მაგალითად,

   $S_0 = S_1$=(1+a) S_0 $S_0 < S_1$=(1+b) S_0.

3. თუ a>0, მაშინ აქციის ორივე შესაძლო ფასი მეტი იქნება აქციის წინა ფასზე.მაგალითად

$S_0 < S_1$=(1+a) S_0 $S_0 < S_1$=(1+b) S_0.
ამრიგად ,პირველ შემთხვევაში აქციის ფასი დროის ყოველ მომენტში ან იკლებს ან იზრდება,მეორე შემთხვევაში ან არ იცვლება,ან იზრდება,მესამე შემთხვევაში კი ყოველთვის იზრდება.

2. განვიხილოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური ხის აგების საკითხი.ვიგულისხმოთ,რომ N=1, ე.ი. n=0,1.
შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$S_1 = S_{1,j} = S_0(1+b)^j(1+a)^{1-j} \qquad (2.1)$$

$$f_1 = f_{1,j} = f(S_{1,j}); \qquad (2.2)$$

სადაც j=0,1, ხოლო f= f_1 რაიმე გადახდის ფუნქციაა.

დროის n=1 მომენტში იმის მიხედვით $\rho_1 = a\ (j=0)$, $(\rho_1 = b\ (j=1)$, აქციის და ოფციონის ფასები დაითვლება შესაბამისად (1.1) და (1.2) ტოლობებით.გვექნება:

$$S_1=S_{1,0}=S_0(1+a) \qquad (2.3)$$

$$S_1=S_{1,1}=S_0(1+b) \qquad (2.4)$$

$$f_1=f_{1.0}=f(S_{1,0}) \qquad (2.5)$$

$$f_1=f_{1.1}=f(S_{1,1}) \qquad (2.6)$$

დროის n=0 მომენტში ცნობილია S_0, a, r და b სიდიდეების მნიშვნელობები. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია (2.3) – (2.6) ტოლობებით განსაზღვრული სიდიდეების გამოთვლა. ოფციონის სამართლიანი და მიმდინარე ფასების გამოთვლისათვის შემდგომში ჩვენ გამოვიყენებთ ე.წ. რისკ-ნეიტრალური ფასდადების პრინციპს, რომლის თანახმად საჭიროა ρ-r სხვაობის მათემატიკური ლოდინი (საშუალო მნიშვნელობა) გავიტოლოთ ნულს. (1.5) განაწილების კანონის საშუალებით გვექნება

$$E(\rho_n\text{-r})=E(\rho_n)\text{-r=bp+a(1-p)-r=(b-a)p-(r-a)}=0,$$

სადაც E აღნიშნავს p ალბათობით მათემატიკური ლოდინის ოპერაციას.
აღვნიშნოთ p-ს მიმართ ამ განტოლების ამონახსნი p^*-ით. გვექნება

$p^* = \frac{r-a}{b-a}, \qquad 1 - p^* = \frac{b-r}{b-a}$ (2.7)

ადვილი შესამოწმებელია,რომ $0<p^*<1$, ახალი p^* ალბათობის საშუალებით ρ_n სიდიდეების განაწილების კანონი მოიცემა შემდეგი სახით:

ρ_n	b	a
$P^*_{\rho_n}$	p^*	$1-p^*$

; $n=0,1,\ldots,N$ (2.8)

ამრიგად, ρ_n სიდიდეები იღებს b ან a მნიშვნელობებს შემდეგი ალბათობებით:

$$P^*(\rho_n = b) = p^*, \qquad P^*(\rho_n = a) = 1 - p^* \qquad (2.9)$$

სადაც p^* განმარტებულია (2.7) ტოლობით.

ადვილი საჩვენებელია,რომ (2.8) განაწილების კანონის თანახმად ρ_n შემთხვევითი სიდიდეების მათემატიკური ლოდინი r საპროცენტო განაკვეთის ტოლია,მართლაც,გვაქვს:

$$E^*(\rho_n) = bp^* + a(1-p^*) = b\frac{r-a}{b-a} + a\frac{b-r}{b-a} = r,$$

სადაც E^* აღნიშნავს p^* ალბათობით მათემატიკური ლოდინის ოპერაციას.შევნიშნოთ,რომ (2.9) ტოლობების გამოყენებით გვექნება:

$$P^*(S_1 = S_{1,1}) = P^*(f_1 = f_{1,1}) = P^*, \qquad (2.10)$$

$$P^*(S_1 = S_{1,0}) = P^*(f_1 = f_{1,0}) = 1-P^*, \qquad (2.11)$$

ამ ტოლობების საშუალებით შეიძლება გამოვთვალოთ f_1 -ის მათემატიკური ლოდინი შემდეგნაირად

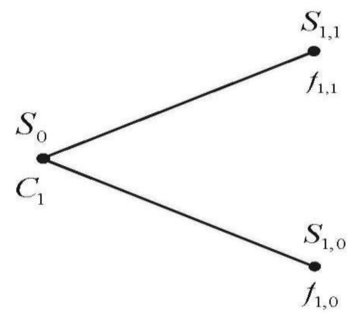
$$E^*(f_1) = p^* f_{1,1} + (1-p^*) f_{1,0},$$

ხოლო ოფციონის სამართლიანი ფასი C_1, რომელსაც კიდევ $C_{0;0}$ -ით აღვნიშნავთ, r - საპროცენტო განაკვეთის გათვალისწინებით გამოითვლება შემდეგი ტოლობით

$$C_1 = C_{0;0} = (1 + r)^{-1} [p^* f_{1,1} + (1-p^*) f_{1;0}] \qquad (2.12)$$

ბინომური ხის კვაძებში ზედა მხარეზე წერენ აქციის ფასების,ხოლო ქვედა მხარეზე ოფციონის ფასების მნიშვნელობებს.დროის n=0 მომენტს შეესაბამება ბინომური ხის საწყისი კვანძი (წვერო), რომელშიც წერენ აქციის საწყისი ფასის მნიშვნელობას და

ოფციონის სამართლიან ფასს. დროის n=1 მომენტს შეესაბამება წვეროდან გამომავალი ორი შტოს ბოლოს ორი ფინალური (ბოლო) კვანძი. (2.3)-(2.6) და (1.12) ტოლობების გათვალისწინებით სქემატურად ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე შეიძლება დავხაზოთ შემდეგნაირად:



ნახ. 2.1

3. გადავიდეთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხის აგებაზე. ვიგულისხმოთ,რომ N=2, ე.ი. n=0,1,2. ადვილი მისახვედრია,რომ ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება სამი ფინალური კვანძი.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$S2 = S_{2,j} = S_0(1 + b)^j(1 + a)^{2-j} \qquad (2.13)$$

$$f_2 = f_{2,j} = f(S_{2,j}); \qquad (2.14)$$

სადაც j=0,1,2, ხოლო f= f_2 რაიმე გადახდის ფუნქციაა.

დროის n=2 მომენტში აქციის და ოფციონის ფასები დაითვლება, შესაბამისად, (2.13) და (2.14) ტოლობებით. ორნაბიჯიანი ბინომური ხის სამ ფინალურ კვანძში j=0, j=1 და j=2 შემთხვევების შესაბამისად გვექნება:

$$S_2 = S_{2,0} = S_0 \; (1 + a)^2; \qquad (2.15)$$

$$S_2 = S_{2,1} = S_0 \; (1 + b)(1 + a); \qquad (2.16)$$

$$S_2 = S2{,}2 = S0(1 + b)^2; \qquad (2.17)$$

$$f_2 = f2{,}0 = f(S_{2,0}); \qquad (2.18)$$

$$f_2 = f2{,}1 = f(S_{2,1}); \qquad (2.19)$$

$$f_2 = f2{,}2 = f(S_{2,2}); \qquad (2.20)$$

დროის n=1 მომენტში ოფციონის მიმდინარე ფასებისათის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$C_{1,0}= f(S_{1,0}); \qquad (2.21)$$

$$C_{1,1}= f(S_{1,1}): \qquad (2.22)$$

ეს სიდიდეები (2.18) , (2.19) და (2.20) ტოლობის გათვალისწინებით დაითვლება, შესაბამისად, შემდეგი ტოლობებით:

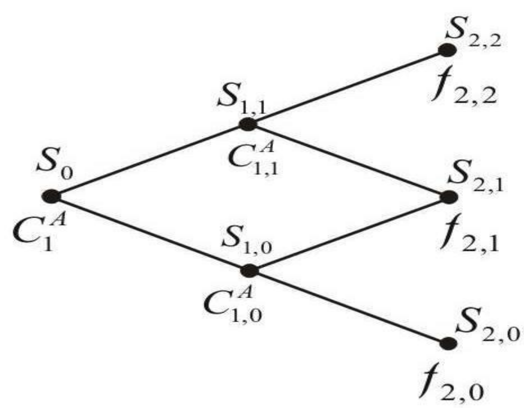
$$C_{1,0}= (1 +r)^{-1}[p^*f_{2;1} + (1 -p^*)f_{2,0}] \qquad (2.23)$$

$$C_{1,0}= (1+r)^{-1}[p^*f_{2;2} + (1 -p^*)f_{2,1}] \qquad (2.24)$$

რაც შეეხება ოფციონის სამართლიან ფასს,იგი დაითვლება (2.23) და (2.24) ტოლობების საშუალებით შემდეგი ტოლობით:

$$C_2 = C_{0;0} = (1 + r)^{-1} [p^*C_{1,1} + (1-p^*)C_{1,0}] \qquad (2.25)$$

ორნაბიჯიანი ბინომური ხე (2.15)-(2.20) და (2.13)-(2.25) ტოლობების გათვალისწინებით სქმეტურად შეიძლება დავხაზოთ შემდეგნაირად:



ნახ. 2.2

4. პარაგრაფის ბოლოს გვინდა მოვიყვანოთ ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის სამართლიანი ფასის ფორმულა,რომელიც ფინანსური ბაზრის (1.1) , (1.2)

ბინომური მოდელის ავტორებს ეკუთვნით. ეს ფორმულა იმით არის საინტერესო,რომ მასში შედის მხოლოდ მოდელის საწყისი პარამეტრები ანუ S_0, a, r, b, K და N სიდიდეები.

აღვნიშნოთ k_0-ით ის უმცირესი მთელი რიცხვი,რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი უტოლობა:

$$S_0(1+a)^N * \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k > K. \qquad (2.32)$$

შევნიშნოთ,რომ k_0-ის გამოთვლა შეიძლება როგორც (2.32) უტოლობის გამოყენებით,ასევე შემდეგი დამოკიდებულებიდან,რომელიც უშუალოდ (2.32) უტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$k_0=1+[\ln\frac{K}{S_0(1+a)^N} / \ln\frac{1+b}{1+a}] \qquad (2.33)$$

სადაც [x] სიმბოლო აღნიშნავს x რიცხვის მთელ ნაწილს და განმარტებით არის ის უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება x რიცხვს. მაგალითად [7,5]=7.

სამართლიანი ფასის ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$C_N = S_0 \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k --K(1+r)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k}$$
((2.34)

სადაც p^*-ით განსაზღვრულია (2.7) ტოლობით , ხოლო C_N^k არის N ელემენტიდან k ელემენტიანი ჯუფდება და განიმარტება ტოლობით

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}, \quad k \le N \qquad (2.35)$$

ნატურალური n რიცხვისთვის n! (იკითხება n ფაქტორიალი) განმარტებით ტოლია n!=1*2*….*n. მიღებულია,რომ 0!=1.

შევნიშნოთ,რომ თუ k_0>N, მაშინ C_N=0.

განვიხილოთ ახლა ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი (1.24) გადახდის ფუნქციით და აღვნიშნოთ P_N-ით მისი სამართლიანი ფასი.მტკიცდება,რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$P_N = C_N - S_0 + K(1+r)^{-N} \qquad (2.36)$$

ამ ტოლობას „ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის“ ფორმულა ეწოდება. იგი ადგენს კავშირს ევროპული ტიპის ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული ოფციონების სამართლიან ფასებს შორის.

§3. მოპასუხე პორტფელი

1. განვიხილოთ ფინანსური (B,S) - ბაზრის ბინომური მოდელი (1.1) (1.2). გაკრვეულობისთვის ვიგულისხმოთ,რომ გვაქვს აქციის ყიდვის ან გაყიდვის ევროპული ტიპის ოფციონი რაიმე გადახდის ფუნქციით $f = f_N$.

ვთქვათ,დროის n მომენტში ინვესტორს (ემიტენტს) აგებული აქვს პორტფელი π_n=(β_n, γ_n), რომლის შესაბამისი კაპიტალი მოიცემა ტოლობით

$$X_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{\pi}} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n \tag{3.1}$$

დროის n+1 მომენტის დადგომამდე შეიძლება ავაგოთ ახალი პორტფელი $\pi_{n+1} = (\beta_{n+1}, \gamma_{n+1})$, რომლის საშუალებით (3.1) ტოლობით მოცემული $X_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{\pi}}$ კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{\pi}} = \beta_{n+1} B_n + \gamma_{n+1} S_n \tag{3.2}$$

დროის n+1 მომენტის დადგომის შემდეგ B_{n+1} და S_{n+1} სიდიდეების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით π_{n+1} პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი მოიცემა ტოლობით:

$$X_{\boldsymbol{n+1}}^{\boldsymbol{\pi}} = \beta_{n+1} B_{n+1} + \gamma_{n+1} S_{n+1}. \tag{3.3}$$

ჩვენი ამოცანაა დროის ყოველ n მომენტში, n=0,1,…,N-1 აგებული პორტფელი იყოს მინიმალური ჰეჯი, ანუ იყოს ისეთი,რომ დროის n=N მომენტში შესრულდეს (1.21) პირობა. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად ჩვენ გამოვიყენებთ მოპასუხე პორტფელის პრონციპს,რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: დროის n მომენტში აგებული π_{n+1}=($\beta_{n+1}, \gamma_{n+1}$) პორტფელის შესაბამისი კაპიტალისთვის დროის n+1 მომენტში უნდა შესრულდეს ტოლობა:

$$X_{\boldsymbol{n+1}}^{\boldsymbol{\pi}} = \beta_{n+1} B_{n+1} + \gamma_{n+1} S_{n+1} = \mathrm{f}(S_{n-1}) \tag{3.4}$$

ფინანსური ბაზრის (1.1) , (1.2) მოდელის გათვალისწინებით (3.4) ტოლობა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი ორი ტოლობის სახით:

$$\beta_{n+1}(1 + r)B_n + \gamma_{n+1}(1 + b)S_n = \mathrm{f}((1 + b)S_n), \tag{3.5}$$

$$\beta_{n+1}(1 + r)B_n + \gamma_{n+1}(1 + a)S_n = \mathrm{f}((1 + a)S_n), \tag{3.6}$$

როგორც ვხედავთ, β_{n+1} და γ_{n+1} უცნობი სიდიდეებიის მიმართ მივიღეთ ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემა. აღვნიშნოთ β_{n+1}^* და γ_{n+1}^* სიდიდეებით ამ სისტემის ამონახსნი. ადვილად დავრწმუნდებით იმაში,რომ ეს ამონახსნი მოიცემა სემდეგი ტოლობებით:

$$\beta_{n+1}^{*}=\frac{(1+b)\mathrm{f}\big((1+a)S_n\big)-(1+a)\mathrm{f}((1+b)S_n)}{(1+r)(b-a)B_n}, \qquad (3.7)$$

$$\gamma_{n+1}^{*}=\frac{\mathrm{f}\big((1+b)S_n\big)-\mathrm{f}((1+a)S_n)}{(b-a)S_n} \qquad (3.8)$$

ამრიგად, თუ დროის n=0,1,..,N მომენტებში პორტფელებს ავაგებთ (3.7), (3.8) ტოლობების გამოყენებით, მასინ დროის ბოლო N მომენტში π_N^*=(β_N^*,γ_N^*), პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი,მოპასუხე პორტფელის პრონციპის თანახმად,დააკმაყოფილებს პიროზას

$$X_N^{\pi^*}=\beta_N^* B_N+\gamma_N^* S_N=\mathrm{f}(S_N) \qquad (3.9)$$

სხვანაირად ეს იმას ნიშნავს,რომ $\pi^*=(\pi_N^*)$, π_N^*=(β_N^*,γ_N^*), პორტფელი (პორტფელების მიმდევრობა) არის მინიმალური ჰეჯი,რომლის შესაბამისი კაპიტალი დროის ბოლო N მომენტში ზუსტად პასუხობს ოფციონის გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობას. ამასთან ერთად,მინიმალური ჰეჯის აგების კონსტრუქციის გათვალისწინებით ადვილად მივიღებთ,რომ იგი არის თვითდაფინანსებადი.

შემოვიტანოთ ახლა β_{n+1}^* და γ_{n+1}^* სიდიდეების (3.7) და (3.8) გამოსახულებები

$X_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{\pi}}$ კაპიტალის (3.2) წარმოდგენაში β_{n+1} და γ_{n+1} სიდიდეების მაგივრად. მაშინ მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$X_n^{\pi^*}=\beta_{n+1}^* B_n+\gamma_{n+1}^* S_n=\frac{(1+b)\mathrm{f}\big((1+a)S_n\big)-(1+a)\mathrm{f}((1+b)S_n)}{(1+r)(b-a)B_n}*B_n+\frac{\mathrm{f}\big((1+b)S_n\big)-\mathrm{f}((1+a)S_n)}{(b-a)S_n}*S_n=(1+$$
$$+r)^{-1}\left[\frac{r-a}{b-a}\,\mathrm{f}\big((1+b)S_n\big)+\frac{b-r}{b-a}\,\mathrm{f}\big((1+a)S_n\big)\right] \qquad (3.10)$$

თუ გამოვიყენებთ (2.7) ტოლობებს, მაშინ π_{n+1}^* მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალი (3.10) წარმოდგენის გათვალისწინებით ჩაიწერება შემდეგი ტოლობით:

$$X_n^{\pi^*}=(1+r)^{-1}\left[\frac{r-a}{b-a}\,\mathrm{f}\big((1+b)S_n\big)+\frac{b-r}{b-a}\,\mathrm{f}\big((1+a)S_n\big)\right] \qquad (3.11)$$

შევნიშნოთ,რომ (3.7)-(3.11) ტოლობებში f გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობები დროის n=0,1,…,N-1 მომენტებში, ფაქტობრივად, წარმოადგენს (2.28)-(2.31) ტოლობებით მოცემულ ოფციონებს.

2. შემდგომში ჩვენ დაგვჭირდება მინიმალური ჰეჯისა და მისი შესაბამისი კაპიტალის ცხადი გამოსახულებები ერთნაბიჯიანი და ორნაბიჯიანი ბინომური ხეებისათვის.

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა N=1 , ე.ი. n=0,1. საჭიროა დროის n=0 მომენტში ავაგოთ

π_1^*=(β_1^*,γ_1^*) მინიმალური ჰეჯი. (3.7) , (3.8) ტოლობების და (2.1), (2.2) აღნიშვნების თანახმად გვექნება:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)\mathrm{f}((1+a)S_0)-(1+a)\mathrm{f}((1+b)S_0)}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{(1+b)\mathrm{f}(S_{1,0})-(1+a)\mathrm{f}(S_{1,1})}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{(1+b)f_{1,0}-(1+a)f_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} \tag{3.12}$$

$$\gamma_1^* = \frac{\mathrm{f}((1+b)S_0)-\mathrm{f}((1+a)S_0)}{(b-a)S_0} = \frac{\mathrm{f}(S_{1,1})-\mathrm{f}(S_{1,0})}{(b-a)S_0} = \frac{f_{1,1}-f_{1,0}}{(b-a)S_0} \tag{3.13}$$

დროის n=0 მომენტში (3.12), (3.13) ტოლობებით $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)$ მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალი (3.2), (3.12) ტოლობების თანახმად, ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\mathrm{X}_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0+\gamma_1^* S_0 \tag{3.14}$$

$$\mathrm{X}_0^{\pi^*}=(1+r)^{-1}[\,p^*\,\mathrm{f}((1+b)S_0)+(1-\,p^*)\,\mathrm{f}((1+a)S_0)]= (1+r)^{-1}[\,p^* f(S_{1,1})+(1-\,p^*)\,\mathrm{f}(S_{1,0})] = (1+r)^{-1}[\,p^*\,f_{1,1}+(1-\,p^*)\,f_{1,0}]. \tag{3.15}$$

შევნიშნოთ,რომ (2.12) ტოლობით მოცემული C_1 სამართლიანი ფასის და (3.14), (3.15) ტოლობებით მოცემული $\mathrm{X}_0^{\pi^*}$ კაპიტალის მნიშვნელობები ერთმანეთის ტოლია.

დროის n=1 მომენტში ობლიგაციებისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით π^* მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალი $\mathrm{X}_1^{\pi^*}$ ტოლი იქნება (ზუსტად უპასუხებს) გადახდის ფუნქციის f(S_1) -ის მნიშვნელობას, ე.ი. შესრულდება ტოლობა

$$\mathrm{X}_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1+\gamma_1^* S_1=\mathrm{f}(S_1) \tag{3.16}$$

ამრიგად, N=1 შემთხვევაში დროის n=0 მომენტში აგებული $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)$ მინიმალური ჰეჯისათვის გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$\beta_1^*=\frac{(1+b)f_{1,0}-(1+a)f_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} \tag{3.17}$$

$$\gamma_1^* = \frac{f_{1,1}-f_{1,0}}{(b-a)S_0} \tag{3.18}$$

ხოლო π_1^* პორტფელის შესაბამისი $\mathrm{X}_0^{\pi^*}$ კაპიტალისთვის (3.14) ტოლობასთან ერთად გვაქვს შემდეგი ფორმულა:

$$\mathrm{X}_0^{\pi^*} = (1+r)^{-1}[\,p^*\,f_{1,1}+(1-\,p^*)\,f_{1,0}\,] \tag{3.19}$$

3. განვიხილოთ ახლა შემთხვევა N=2, ე.ი. n=0,1,2. ამ შემთხვევაში დროის n=0 მომენტში საჭიროა ავაგოთ $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)$ მინიმალური ჰეჯი, რომლის შესაბამისი $\mathrm{X}_1^{\pi^*}$ კაპიტალით დროის n=1 მომენტში უნდა ავაგოთ $\pi_2^*=(\beta_2^*,\gamma_2^*)$ მინიმალური ჰეჯი. (2.21), (2.22) აღნიშვნებისა და (3.7) , (3.8) ტოლობების თანახმად გვექნება:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)\mathrm{f}((1+a)S_0)-(1+a)\mathrm{f}((1+b)S_0)}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{(1+b)\mathrm{f}(S_{1,0})-(1+a)\mathrm{f}(S_{1,1})}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{(1+b)C_{1,0}-(1+a)C_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0}, \qquad (3.20)$$

$$\gamma_1^* = \frac{\mathrm{f}((1+b)S_0)-\mathrm{f}((1+a)S_0)}{(b-a)S_0} = \frac{\mathrm{f}(S_{1,1})-\mathrm{f}(S_{1,0})}{(b-a)S_0} = \frac{C_{1,1}-C_{1,0}}{(b-a)S_0}, \qquad (3.21)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ (3.20), (3.21) ტოლობით დროის n=0 მომენტში აგებული $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)$ მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალი (3,2), (3,11) ტოლობების თანახმად ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0, \qquad (3.22)$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+r)^{-1}[\, p^* C_{1,1} + (1-p^*)\, C_{1,0}\,] \qquad (3.23)$$

სადაც $C_{1,0}$ და $C_{1,1}$ სიდიდეები, ისე როგორც (3.20), (3.21) ტოლობებში მოიცემა, შესაბამისად, (2.23). (2.24) ტოლობებით.

ცხადია, $X_0^{\pi^*}$ კაპიტალის (3.22) , (3.23) ტოლობებით მოცემული მნიშვნელობა (2.25) ტოლობით მოცემული C_2 სამართლიანი ფასის ტოლია.

ამრიგად, დროის n=0 მომენტში $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)$ მინიმალური ჰეჯისთვის გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)C_{1,0}-(1+a)C_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} \qquad (3.24)$$

$$\gamma_1^* = \frac{C_{1,1}-C_{1,0}}{(b-a)S_0}, \qquad (3.25)$$

ხოლო π_1^* პორტფელის შესაბამისი $X_0^{\pi^*}$ კაპიტალისთვის გვაქვს (3.22) , (3.23) ფორმულები.

დროის n=1 მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით π_1^* მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის მნიშვნელობა ოფციონის $\mathrm{f}(S_1)$ ფასის მნიშვნელობის ტოლი იქნება და მოიცემა ტოლობით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1 = \mathrm{f}(S_1) \qquad (3.26)$$

ამ თანხით დროის n=1 მომენტში ჩვენ უნდა ავაგოთ $\pi_2^*=(\beta_2^*,\gamma_2^*)$ მინიმალური ჰეჯი. (3.7) და (3,8)ტოლობების თანახმად გვექნება:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)\mathrm{f}((1+a)S_1)-(1+a)\mathrm{f}((1+b)S_1)}{(1+r)(b-a)B_1}, \qquad (3.27)$$

$$\gamma_1^* = \frac{\mathrm{f}((1+b)S_1)-\mathrm{f}((1+a)S_1)}{(b-a)S_1}, \qquad (3.28)$$

დროის n=1 მომენტში $\pi_2^*=(\beta_2^*, \gamma_2^*)$ მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი $X_1^{\pi^*}$ კაპიტალი (3.2), (3.11) ტოლობების თანახმად მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_2^* B_1 + \gamma_2^* S_1, \tag{3.29}$$

$$X_1^{\pi^*} = (1+r)^{-1}[\, p^* \, f\big((1+b)S_1\big) + (1- p^*)\, f\big((1+a)S_1\big)\,] \tag{3.30}$$

დროის n=2 მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით $\pi_2^*=(\beta_2^*, \gamma_2^*)$ მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი $X_2^{\pi^*}$ ტოლი იქნება (ზუსტად უპასუხებს) ოფციონის $f(S_2)$ ფასის მნიშვნელობის, ე.ი. შესრულდება ტოლობა

$$X_2^{\pi^*} = \beta_2^* B_2 + \gamma_2^* S_2 = f(S_2) \tag{3.31}$$

ამრიგად, ბინომური ხეების აგებით და მოპასუხე პორტფელის პრინციპით აგებული მინიმალური ჰეჯის საშუალებით ჩვენ გადავწყვიტეთ ევროპული ტიპის ოფციონის გათვლის ამოცანა. კერძო შემთხვევებში ერთნაბიჯიანი (N=1, n=0,1) და ორნაბიჯიანი (N=2, n=0,1,2) ამოცანებისათვის მოვიყვანეთ ოფციონის სამართლიანი ფასის,მინიმალური ჰეჯისა და მისი შესაბამისი კაპიტალის ფორმულები,რომელსაც შემდგომში გამოვიყენებთ რიცხვითი მაგალითებისათვის.

§ 4. ყიდვის სტანდარტული ოფციონი

განვიხილოთ (1.1), (1.2) ტოლობებით განსაზღვრული ფინანსური (B,S) ბაზრის კოქსის,როსის და რუბენშტეინის დისკრეტული მოდელი

$$B_n=(1+r)\, B_{n-1}, \qquad B_0>0, \tag{4.1}$$

$$S_n=(1+\rho_n)\, S_{n-1}, \quad S_0>0, \quad n=0.1\ldots,N \tag{4.2}$$

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ,რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

I. B_0=20, r=1/5 (4.3)

II. S_0=100, $\rho_n = b = \frac{3}{5}$, ან $\rho_n = a = \frac{2}{5}, n = 0,1,\ldots,N.$ (4.4)

III. ევროპული ტიპის ყიდვის (გაყიდვის) სტანდარტული ოფციონის გადახდის ფუნქციაში შეთანხმების ფასი

$$K=100. \tag{4.5}$$

ჩვენ შემდგომში დაგვჭირდება შემდეგი სიდიდეების და მათი რიცხვითი მნიშვნელობები:

$1+a=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$, $\qquad$ $1+b=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$ $\qquad$ $b-a=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$

$p^*=\frac{r-a}{b-a}=\frac{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}}=1$, $1\text{-}p^* = 1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ (4.6)

$1+r=1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$, $(1+r)\text{-}1=(\frac{6}{5})^{-1}=\frac{5}{6}$

მაგალითი 4.1. განვიხილოთ (4.1), (4.2) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, N=1, ე.ი. n=0,1. გარდა ამისა,ვიგულისხმოთ,რომ შესრულებულია (4.3)-(4.5) პირობები. დავუშვათ,რომ ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$f_1=f(S_1)= \max(S_1-K,0)$ (4.7)

ჩვენი მიზანია გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა და ამისთვის პირველ რიგში ავაგოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე.

დროის n=1 მომეტში აქციისა და ოფციონის შესაძლო ფასების მნიშვნელობები (4.7) და (2.3)-(2.6) ტოლობების თანახმად, შესაბამისად ტოლი იქნება:

$S_{1,0}=S_0(1+a) =100\cdot \frac{3}{5}=60$ (4.8)

$S_{1,1}=S_0(1+b)= 100\cdot \frac{8}{5}=160$ (4.9)

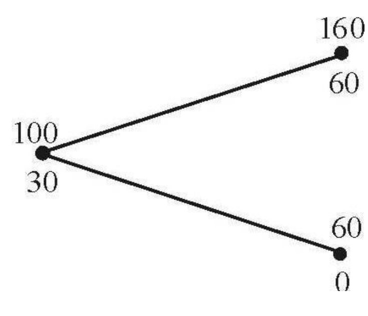
$f_{1.0}=\max(S_{1,0}-K,0)=\max(60-100,0)=0$, (4.10)

$f_{1.1}=\max(S_{1,1}-K,0)=\max(160-100,0)=60$ (4.11)

გამოვთვალოთ, აგრეთვე, დროის n=0 მომენტში ოფციონის საწყისი ფასი,ანუ ოფციონის სამართლიანი ფასი. (4.6) ტოლობების გათვალისწინებით და (2.12) ფორმულის თანახმად გვექნება

$C_1 =(1+r)^{-1} [p^* f_{1.1} + (1\text{-}p^*)f_{1;0}]= \frac{5}{6}(\frac{3}{5}*60+\frac{2}{5}*0)=30$ (4.12)

ამრიგად, ერთნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 4.1

საინტერესოა გამოვთვალოთ C_1 სიდიდის მნიშვნელობა, აგრეთვე კოკსის,როსის და რუბენშტეინის (1.34)ფორმულის საშუალებით. ამისთვის გამოვიყენოთ (2.32) უტოლობა N=1 შემთვევაში. გვექნება

$$S_0(1+a)\left(\frac{1+b}{1+a}\right)>K.$$

ვთქვათ, $k_0=0$, მაშინ გვექნება

$$100\cdot\frac{3}{5}\left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^0>100,$$

საიდანაც მივიღებთ არასწორ უტოლობას $\frac{3}{5}>1$. ამიტომ $k_0=0$ მნიშვნელობა k_0 -ის განმარტების თანახმად არ გამოგვადება.

ვთქვათ, $k_0=1$, მაშინ გვექნება

$$100\cdot\frac{3}{5}\left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right)>100,$$

საიდანაც მივიღებთ სწორ უტოლობას $\frac{8}{5}$. ამრიგად, $k_0=1$. შევნიშნოთ,რომ k_0 -ის მნიშვნელობა შეიძლება გამოვთვალოთ, აგრეთვე (2.33) ფორმულის გამოყენებით.(2.34) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$C_1=S_0C_1^1\,p^*\,(1-p^*)^0\,\frac{1+a}{1+r}\,\frac{1+b}{1+a}-K(1+r)^{-1}\,C_1^1\,p^*\,(1-p^*)^0=100\cdot1\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0\text{x}\,\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{5}}{\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{5}}-$$

$$-100\cdot\frac{5}{6}\cdot1\cdot\frac{3}{6}\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^0=30.$$

ემიტენტის წინაშე დგას შემდეგი ამოცანა:ოფციონის გაყიდვით მიღებული თანხით დროის n=0 მომენტში მან უნდა ააგოს $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)$ მინიმალური ჰეჯი. ეს იმას ნიშნავს,რომ C_1 თანხით (შესაძლოა კიდევ ნასესხები თანხით) მან უნდა შეიძინოს β_1^* რაოდენობის ობლიგაცია და γ_1^* რაოდენობის აქცია, ანუ ააგოს $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)$ პორტფელი,რომლის შესაბამისი კაპიტალი დროის n=1 მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით,ზუსტად $f(S_1)$ სიდიდის ტოლი იქნება. (3.17), (3.18) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$\beta_1^*=\frac{(1+b)f_{1,0}-(1+a)f_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0}=\frac{\frac{8}{5}\cdot0-\frac{3}{5}\cdot60}{\frac{6}{5}\cdot1\cdot20}=-\frac{3}{2} \qquad (4.13)$$

$$\gamma_1^*==\frac{f_{1,1}-f_{1,0}}{(b-a)S_0}=\frac{60-0}{1\cdot100}=\frac{3}{5} \qquad (4.14)$$

ამრიგად , მივიღეთ $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)=(-\frac{3}{2},\frac{3}{5})$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის n=0 მომეტში (დროის n=1 მომენტის დადგომამდე) (3.14), (3.19) ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ, შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*}=\beta_1^*B_0+\gamma_1^*S_0=-\frac{3}{2}\cdot 20+\frac{3}{5}\cdot 100=30 \qquad (4.15)$$

$$X_0^{\pi^*}=(1+r)^{-1}[\,p^*f_{1,1}+(1-p^*)\,f_{1,0}]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 60+\frac{2}{5}\cdot 0\right)=30. \qquad (4.16)$$

პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*}=\beta_1^*B_0+\gamma_1^*S_0=-\frac{3}{2}\cdot B_1+\frac{3}{5}\cdot S_1=f(S_1) \qquad (4.17)$$

ნახ. 4.1 -ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა:

შემთხვევა I. ვთქვათ, $S_1=S_{1,1}=160$. ობლიგაციის ფასია $B_1=(1+r)\,B_0=6/5\cdot 20=24$.

ასეთ შემთხვევაში (4.17)-ის თანახმად გვექნება:

$$X_1^{\pi^*}=-\frac{3}{2}\cdot 24+\frac{3}{5}\cdot 160=60,$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას:

$f_{1,1}=f(S_{1,1})=60$.

ამრიგად, დროის n=1 მომენტში ემიტენტი გაყიდის 3/5 აქციას და მიიღებს 3/5·160=96- ის ტოლ თანხას. ამ თანხიდან ის გაისტუმრებს 3/2 ობლიგაციის ვალს ანუ 3/2·24=36-ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი 96-36=60-ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას.

შემთხვევა II. ვთქვათ, $S_1=S_{1,0}=60$. ასეთ შემთხვევაში (4.17)-ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\pi^*}=-\frac{3}{2}\cdot 24+\frac{3}{5}\cdot 60=0,$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას

$f_{1,0}=f(S_{1,0})=0$.

დროის n=1 მომენტში ემიტენტი გაყიდის 3/5 აქციას და მიიღებს 3/5x60=36- ის ტოლ თანხას,რითაც ის ზუსტად გაისტუმრებს 3/2 ობლიგაციის ვალს ანუ 3/2x24=36-ის ტოლ თანხას, ხოლო ოფციონის ვალდებულებით ის არაფერს იხდის,რადგან $f_{1,0}=f(S_{1,0})=0$.

მაგალითი 4.2. განვიხილოთ (4.1), (4.2) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, N=2, ე.ი. n=0,1,2.,ვიგულისხმოთ,რომ შესრულებულია (4.3)-(4.5) პირობები. დავუშვათ,რომ

ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_2=f(S_2)=\max(S_2-K,0) \qquad (4.18)$$

ჩვენი მიზანია გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა და ავაგოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხე. დროის n=2 მომენტში ბინომური ხის სამ ფინალურ(ბოლო) კვანძში აქცის შესაძლო ფასების მნისვნელობებისათვის (2.15)-(2.20) ტოლობების თანახმად გვექნება:

$$S_{2,0}=S_0(1+b)^0(1+a)^2=100\cdot(8/5)^0\cdot(3/5)^2=36 \qquad (4.19)$$

$$S_{2,1}=S_0(1+b)(1+a)=100\cdot 8/5x^{\sim}\cdot 3/5=936 \qquad (4.20)$$

$$S_{2,2}=S_0(1+b)^2(1+a)^0=100\cdot(8/5)^2\cdot(3/5)^0=256 \qquad (4.21)$$

$$f_{2.0}=f(S_{2,0})=\max(S_{2,0}-K,0)=\max(36-100,0)=0, \qquad (4.22)$$

$$f_{2.1}=f(S_{2,1})=\max(S_{2,1}-K,0)=\max(96-100,0)=0 \qquad (4.23)$$

$$f_{2.2}=f(S_{2,2})=\max(S_{2,2}-K,0)=\max(256-100,0)=156 \qquad (4.24)$$

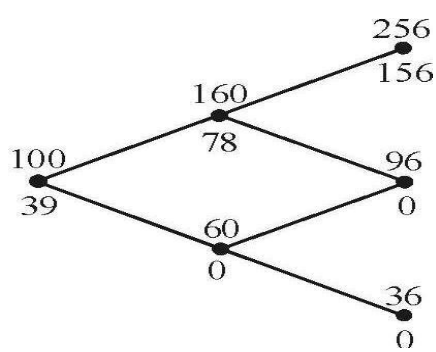
დროის n=1 მომენტში შესაბამის ორ კვანძში ჩვენ გამოთვლილი გვაქვს აქციის შესაძლო ფასები (4.8) , (4.9) ტოლობებით, რომლის თანახმად $S_{1,0}=60$, $S_{1,1}=160$. შემდეგ (2.23)-(2.25) ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$C_{1,0}=(1+r)^{-1}[p^*f_{2,1}+(1-p^*)f_{2,0}]=\frac{5}{6}(\frac{3}{5}\cdot 0+\frac{2}{5}\cdot 0)=0 \qquad (4.25)$$

$$C_{1,1}=(1+r)^{-1}[p^*f_{2,2}+(1-p^*)f_{2,1}]=\frac{5}{6}(\frac{3}{5}\cdot 156+\frac{2}{5}\cdot 0)=0 \qquad (4.26)$$

$$C_2=(1+r)^{-1}[p^*C_{1,1}+(1-p^*)C_{1,0}]=\frac{5}{6}(\frac{3}{5}\cdot 75+\frac{2}{5}\cdot 0)=39 \qquad (4.27)$$

ამრიგად ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 4.2

C_2 სიდიდის მნიშვნელობა გამოითვლება შემდეგნაირად :

$C_2=S_0C_2^2(p^*)^2(1-p^*)^2(\frac{1+a}{1+r})^2\,(\frac{1+b}{1+a})^2-K(1+r)^{-2}C_2^2(p^*)^2(1-p^*)^2=100\cdot 1\cdot(\frac{3}{5})^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0\cdot(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}})^2\cdot(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}})^2-100\,(\frac{5}{6})^2\cdot 1(\frac{3}{5})^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0=39.$

ემიტენტის წინაშე დგას შემდეგი ამოცანა:ოფციონის გაყიდვით მიღებული C_2 თანხით (შესაძლოა კიდევ ნასესხები თანხით) დროის n=0 მომენტში მან უნდა ააგოს $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)$ მინიმალური ჰეჯი.დროის n=1 მომენტში ამ პორტფელის შესაბამისი თანხით ემიტენტმა უნდა ააგოს $\pi_2^*=(\beta_2^*,\gamma_2^*)$ მინიმალური ჰეჯი,რომლის შესაბამისი კაპიტალი დროის n=2 მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით,ზუსტად $f(S_2)$ სიდიდის ტოლი იქნება.

(3.24), (3.25) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)C_{1,0}-(1+a)C_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 0-\frac{3}{5}\cdot 78}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 20}=-\frac{39}{20} \qquad (4.28)$$

$$\gamma_1^* = =\frac{C_{1,1}-C_{1,0}}{(b-a)S_0} = \frac{78-0}{1\cdot 100}=\frac{39}{50} \qquad (4.29)$$

ამრიგად , მივიღეთ $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)=(-\frac{39}{20},\frac{39}{50})$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის n=0 მომეტში (3.22), (3.23) ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ, შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0+\gamma_1^* S_0=-\frac{39}{20}\cdot 20+\frac{39}{50}\cdot 100=39 \qquad (4.30)$$

$$X_0^{\pi^*}=(1+r)^{-1}[\,p^*\,C_{1,1}+(1-\,p^*)\,C_{1,0}]=\frac{5}{6}\,(\frac{3}{5}\cdot 78+\frac{2}{5}\cdot 0)=39. \qquad (4.31)$$

პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0+\gamma_1^* S_0=-\frac{39}{20}\,B_1+\frac{39}{50}\,S_1=f(S_1) \qquad (4.32)$$

ნახ. 4.2 -ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა:

შემთხვევა I. ვთქვათ, $S_1=S_{1,1}=160$. ობლიგაციის ფასია $B_1=(1+r)\,B_0=6/5x20=24$.

ასეთ შემთხვევაში (4.32)-ის თანახმად გვექნება:

$$X_1^{\pi^*} =-\frac{39}{20}\cdot 24+\frac{39}{50}\cdot 160=78,$$

ამრიგად, დროის n=1 მომენტში $X_1^{\pi^*}$ =78-ის ტოლი თანხით ემიტენტმა უნდა ააგოს π_2^*=(β_2^*, γ_2^*) მინიმალური ჰეჯი. (3.27) (3.28) ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$\beta_2^* = \frac{(1+b)f_{2,1}-(1+a)f_{2,2}}{(1+r)(b-a)B_1} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 0-\frac{3}{5}\cdot 156}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 24} = -\frac{13}{4} \quad (4.34)$$

$$\gamma_1^* = \frac{f_{2,2}-f_{2,1}}{(b-a)S_{1,1}} = \frac{156-0}{1\cdot 160} = \frac{39}{40} \quad (4.35)$$

ამრიგად π_2^*=(β_2^*, γ_2^*)=($-\frac{13}{4}, \frac{39}{40}$). ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის n=1 მომენტში ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_2^* B_1 + \gamma_2^* S_1 = -\frac{13}{4}\cdot 24 + \frac{39}{50}\cdot 160 = 78 \quad (4.36)$$

$$X_1^{\pi^*} = (1+r)^{-1}[\, p^*\, f_{2,2} + (1-\ p^*)\, f_{2,1}] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 156 + \frac{2}{5}\cdot 0\right) = 78. \quad (4.37)$$

დროის n=2 მომენტში (3.31) ფორმულის თანახმად π_2^*=(β_2^*, γ_2^*)=($-\frac{13}{4}, \frac{39}{40}$) პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_2^{\pi^*} = \beta_2^* B_2 + \gamma_2^* S_2 = -\frac{13}{4} B_2 + \frac{39}{40} S_1 = f(S_2) \quad (4.38)$$

$$X_2^{\pi^*} = -\frac{13}{4}\cdot\frac{144}{5} + \frac{39}{40}\cdot 256 = 156$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას

$f_{2,2}=f(S_{2,2})=156$.

შემთხვევა II. ვთქვათ, $S_1=S_{1,0}=60$. ობლიგაციის ფასი B_1 =24, ასეთ შემთხვევაში (4.32)-ის თანახმად გვექნება :

$$X_2^{\pi^*} = \frac{39}{20} \text{ x } 24 + \frac{39}{50} \text{ x } 60 = 0 \quad (4.39)$$

რაც ზუსატდ ემთხვევა $C_{1,0}$ - ის მნიშვნელობას.

ავაგოთ ამ შემთხვევაში π_2^*=(β_2^*, γ_2^*) მინიმალური ჰეჯი. (3.27), (3.28) ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$\beta_2^* = \frac{(1+b)f_{2,0}-(1+a)f_{2,1}}{(1+r)(b-a)B_1} = \frac{\frac{8}{5}\text{x}0-\frac{3}{5}\text{x}0}{\frac{6}{5}\text{x}1\text{x}24} = 0. \quad (4.40)$$

$$\gamma_1^* = \frac{f_{2,1}-f_{2,0}}{(b-a)S_{1,0}} = \frac{0-0}{1\text{x}60} = 0 \quad (4.41)$$

ამრიგად, მივიღეთ π_2^*=(β_2^*,γ_2^*)=(0,0). ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის n=1 მომენტში (3.29), (3.30) ფორმულების თანახმად,შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_2^* B_1 + \gamma_2^* S_{1,0} = -0x24+ 0x60=0 \quad (4.42)$$

$$X_1^{\pi^*} = (1+r)^{-1}[p^* f_{2,1} + (1- p^*) f_{2,0}] = \frac{5}{6}(\frac{3}{5}x0+\frac{2}{5}x0)=0. \quad (4.43).$$

ამრიგად,3.2-ის პირობებში ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია.

§ 5. გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი

მაგალითი 5.1. განვიხილოთ (1.1), (1.2) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, N=1, ე.ი. n=0,1. გარდა ამისა,ვიგულისხმოთ,რომ შესრულებულია (4.3)-(4.5) პირობები. დავუშვათ,რომ ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_1=f(S_1)= \max(K - S_1, 0) \quad (5.1)$$

ჩვენი მიზანია გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა და ამისთვის პირველ რიგში ავაგოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე.

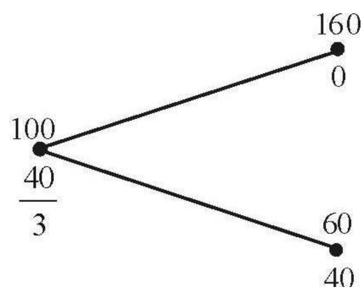
$$S_{1,0}= 60, \quad S_{1,1}= 160 \quad (5.2)$$

$$f_{1.0}=\max(K-S_{1,0}, 0)=\max(100-60,0)=40 \quad (5.3)$$

$$f_{1.1}=\max(K-S_{1,1},0)=\max(100-160,0)=0 \quad (5.4)$$

$$P_1 =(1+r)^{-1} [p^* f_{1,1} + (1-p^*)f_{1;0}]= \frac{5}{6}(\frac{3}{5} \cdot 0+\frac{2}{5} \cdot 40)= \frac{40}{3} \quad (5.5)$$

ამრიგად, ერთნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 5.1

საინტერესოა გამოვთვალოთ P_1 სიდიდის მნიშვნელობა, აგრეთვე, „ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის" (2.36) ფორმულით. ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიან ამოვანაში (4.12) ტოლობით მოცემული C_1=30 სამართლიანი ფასის მნიშვნელობის გათვალისწინებით გვექნება:

$P_1 = C_1 - S_0 + K(1+r)^{-1} = 30-100+100\cdot \frac{5}{6} = \frac{40}{3}$

ავაგოთ დროის n=0 მომენტში $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)$ მინიმალური ჰეჯი. (3.17), (3.18) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)f_{1,0}-(1+a)f_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 40-\frac{3}{5}\cdot 0}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 20}=\frac{8}{3} \quad (5.6)$$

$$\gamma_1^* = =\frac{f_{1,1}-f_{1,0}}{(b-a)S_0} = \frac{0-40}{1\cdot 100} =-\frac{2}{5} \quad (5.7)$$

ამრიგად , მივიღეთ $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)=(\frac{8}{3},-\frac{2}{5})$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის n=0 მომენტში (3.14), (3.19) ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ, შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0+\gamma_1^* S_0=\frac{8}{3}\cdot 20-\frac{2}{5}\cdot 100=\frac{40}{3} \quad (5.8)$$

$$X_0^{\pi^*}=(1+r)^{-1}[\,p^*\, f_{1,1}+(1-\,p^*)\, f_{1,0}]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 0+\frac{2}{5}\cdot 40\right)=\frac{40}{3}. \quad (5.9)$$

დროის n=1 მომენტში (3.16) ფორმულის თანახმად $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)=(\frac{8}{3},-\frac{2}{5})$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0+\gamma_1^* S_0=\frac{8}{3}B_1-\frac{2}{5}S_1=f(S_1) \quad (5.10)$$

ნახ. 5.1 -ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა:

შემთხვევა I. ვთქვათ, $S_1=S_{1,1}$=160. ობლიგაციის ფასია B_1=(1+r) B_0=6/5x20=24.

ასეთ შემთხვევაში გვექნება:

$$X_1^{\pi^*} = \frac{8}{3}\cdot 24-\frac{2}{5}\cdot 160=0$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას:

$f_{1,1}=f(S_{1,1})=0$.

დროის n=1 მომენტში ემიტენტი გაყიდის 8/3 აქციას და მიიღებს 8/3x24=64 - ის ტოლ თანხას. რითაც ის ზუსტად გაისტუმრებს 2/5 აქციის ვალს ანუ 2/5x160=64-ის ტოლ თანხას. ოფციონის ვალდებულებით კი იგი არაფერს იხდის,რადგან $f_{1,1}$=0.

შემთხვევა II. ვთქვათ, $S_1=S_{1,0}$=60. ასეთ შემთხვევაში გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = \frac{8}{3}\cdot 24-\frac{2}{5}\cdot 60=40,$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას

$f_{1,0}=f(S_{1,0})=40$.

დროის n=1 მომენტში ემიტენტი გაყიდის 8/3 აქციას და მიიღებს 8/3x24=64 - ის ტოლ თანხას,ამ თანხიდან გაისტუმრებს 2/5 აქციის ვალს ანუ 2/5x60=24-ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი 64-24=40-ის ტოლი თანხით ის შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას.

ამრიგად, მაგალითი **5.1**-ის პირობებში ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია.

მაგალითი 5.2. განვიხილოთ (1.1), (1.2) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, N=2, ე.ი. n=0,1,2.,ვიგულისხმოთ,რომ შესრულებულია (4.3)-(4.5) პირობები. დავუშვათ,რომ ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_2=f(S_2)=\max(K-S_2,0) \qquad (5.11)$$

ჩვენი მიზანია გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა და ამისთვის პირველ რიგში ავაგოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხე. დროის n=2 მომენტში გვაქვს:

$$f_{2.0}=f(S_{2,0})=\max(K-S_{2,0},0)=\max(100-36,0)=64, \qquad (5.12)$$

$$f_{2.1}= f(S_{2,1})=\max(K-S_{2,1},0)=\max(100-96,0)=4 \qquad (5.13)$$

$$f_{2.2}= f(S_{2,2})=\max(K-S_{2,2},0)=\max(100-256,0)=0 \qquad (5.14)$$

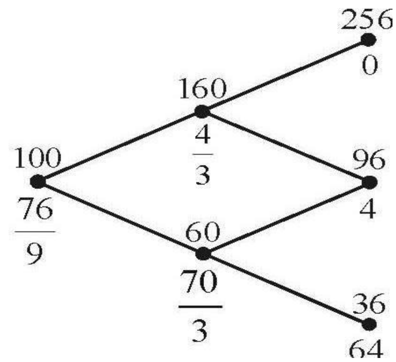
დროის n=1 მომენტში გვექნება:

$$P_{1,0}=(1+r)^{-1}\,[p^*\,f_{2,1}+(1-p^*)f_{2,0}]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 4+\frac{2}{5}\cdot 64\right)=\frac{70}{3} \qquad (5.15)$$

$$P_{1,1}=(1+r)^{-1}\,[p^*\,f_{2,2}+(1-p^*)f_{2,1}]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 0+\frac{2}{5}\cdot 4\right)=\frac{4}{3} \qquad (5.16)$$

$$P_2=(1+r)^{-1}\,[p^*\,P_{1,1}+(1-p^*)\,P_{1,0}]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{70}{3}\right)=\frac{76}{9} \qquad (5.17)$$

ამრიგად ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 5.2.

გამოვთვალოთ P_2 სიდიდის მნიშვნელობა, აგრეთვე, „ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის" (2.36) ფორმულით. ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიან ამოცანაში (4.27) ტოლობით მოცემული $C_2=39$ სამართლიანი ფასის მნიშვნელობის გათვალისწინებით გვექნება:

$P_2 = C_2 - S_0 + K(1+r)^{-2} = 39-100+100\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^{-2}= \frac{76}{9}$

შემდეგ გვაქვს:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)P_{1,0}-(1+a)P_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot\frac{70}{3}-\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 20}=\frac{137}{90} \qquad (5.18)$$

$$\gamma_1^* = \frac{P_{1,1}-P_{1,0}}{(b-a)S_0} = \frac{\frac{4}{3}-\frac{70}{3}}{1\cdot 100} = -\frac{11}{50} \qquad (5.19)$$

ამრიგად , მივიღეთ $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)=(\frac{137}{90},-\frac{11}{50})$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის n=0 მომეტში შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0+\gamma_1^* S_0=\frac{137}{90}\cdot 20-\frac{11}{50}\cdot 100=\frac{76}{9} \qquad (5.20)$$

$$X_0^{\pi^*}=(1+r)^{-1}[\,p^*P_{1,1}+(1-p^*)\,P_{1,0}]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{70}{3}\right)=\frac{76}{9}. \qquad (5.21)$$

დროის n=1 მომენტში $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)=(\frac{137}{90},-\frac{11}{50})$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1+\gamma_1^* S_1=\frac{137}{90}\cdot B_1-\frac{11}{50}\cdot S_1 = f(S_1) \qquad (5.22)$$

ნახ. 5.2 -ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა:

შემთხვევა I. ვთქვათ, S_1=$S_{1,1}$=160. ობლიგაციის ფასია B_1=(1+r) B_0=6/5·20=24.

ასეთ შემთხვევაში გვექნება:

$$X_1^{\pi^*} =-\frac{137}{90}\cdot 24-\frac{11}{50}\cdot 160=\frac{4}{3} \qquad (5.23)$$

რაც ზუსტად ემთხვევა $P_{1,1}$-ის მნიშვნელობას.

დროის n=1 მომენტში $X_1^{\pi^*} = \frac{4}{3}$-ის ტოლი თანხით ემიტენტმა უნდა ააგოს π_2^*=(β_2^*,γ_2^*) მინიმალური ჰეჯი, გვექნება:

$$\beta_2^* = \frac{(1+b)f_{2,1}-(1+a)f_{2,2}}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 4-\frac{3}{5}\cdot 0}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 24}=\frac{2}{9} \qquad (5.24)$$

$$\gamma_1^* = =\frac{f_{2,2}-f_{2,1}}{(b-a)S_{1,1}} = \frac{0-4}{1\cdot 160}=-\frac{1}{40} \qquad (5.25)$$

ამრიგად, მივიღეთ

π_2^*=(β_2^*,γ_2^*)=($\frac{2}{9}, -\frac{1}{40}$). ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის n=1 მომენტში

ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_2^* B_1+\gamma_2^* S_1=\frac{2}{9}\cdot 24-\frac{1}{40}\cdot 160=\frac{4}{3} \qquad (5.26)$$

$$X_1^{\pi^*}=(1+r)^{-1}[\, p^*\, f_{2,2}+(1-\ p^*)\ f_{2,1}]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 0+\frac{2}{5}\cdot 4\right)=\frac{4}{3}. \qquad (5.27)$$

დროის n=2 მომენტში π_2^*=(β_2^*,γ_2^*)= ($\frac{2}{9}, -\frac{1}{40}$) პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_2^{\pi^*} = \beta_2^* B_2+\gamma_2^* S_2=\frac{2}{9}\cdot B_2-\frac{1}{40}\cdot S_1=f(S_2) \qquad (5.28)$$

$$X_2^{\pi^*} = \frac{2}{9}\cdot\frac{144}{5}-\frac{1}{40}\cdot 256=0 \qquad (5.29)$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას

$f_{2,2}$=f($S_{2,2}$)=0.

შემთხვევა II. ვთქვათ, S_1=$S_{1,0}$=60. ობლიგაციის ფასი B_1 =24, ასეთ შემთხვევაში გვექნება :

$$X_1^{\pi^*} = \frac{137}{90}\cdot 24-\frac{11}{50}\cdot 60=\frac{70}{3} \qquad (5.30)$$

რაც ზუსტად ემთხვევა $P_{1,0}$ - ის მნიშვნელობას.

დროის n=1 მომენტში $X_1^{\pi^*} = \frac{70}{3} -$ ის ტოლი თანხით ავაგოთ ამ შემთხვევაში $\pi_2^*=(\beta_2^*, \gamma_2^*)$ მინიმალური ჰეჯი, გვექნება:

$$\beta_2^* = \frac{(1+b)f_{2,0}-(1+a)f_{2,1}}{(1+r)(b-a)B_1} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 64-\frac{3}{5}\cdot 4}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 24} = \frac{125}{36}. \tag{5.31}$$

$$\gamma_1^* = \frac{f_{2,1}-f_{2,0}}{(b-a)S_{1,0}} = \frac{4-64}{1\cdot 60} = -1 \tag{5.32}$$

ამრიგად, მივიღეთ $\pi_2^*=(\beta_2^*, \gamma_2^*)=(\frac{125}{36}, -1)$.

ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის n=1 მომენტში შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_2^* B_1 + \gamma_2^* S_{1,0} = \frac{125}{36}\cdot 24 - 1\cdot 24 = \frac{70}{3} \tag{5.33}$$

$$X_1^{\pi^*} = (1+r)^{-1}[\,p^*\, f_{2,1} + (1-\ p^*)\ f_{2,0}] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 4 + \frac{2}{5}\cdot 64\right) = \frac{70}{3}. \tag{5.34}$$

ამრიგად, მაგალითი 5.2-ის პირობებში ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია.

§ 6. ამერიკული ოფციონის ფასდადება

1. ამერიკული ოფციონი ევროპული ოფციონის მსგავსად წარმოადგენს წარმოებულ ფასიან ქაღალდს,რომლის მფლობელს აქვს რაიმე საბაზისო აქტივის ყიდვის ან გაყიდვის უფლება. როგორც ვიცით, ევროპული ოფციონის მფლობელს შეუძლია მისი განაღდება ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის მხოლოდ ბოლო მომენტში. ამისგან განსხვავებით,ამერიკული ოფციონის მფლობელს შეუძლია მისი განაღდება ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის დროის ნებისმიერ მომენტში.

ბუნებრივია,ამერიკული ოფციონი ევროპულ ოფციონზე უფრო მიმზიდველია,ვინაიდან მის მფლობელს ფინანსურ ბაზარზე მიმდინარე პროცესსი აქტიური მონაწილეობის საშუალება ეძლევა. მართაც, მაქსიმალური სარგებლის (გასამრჯელოს) მიღების მიზნით,ბაზრის მიმდინარე ინფორმაციის გამოყენებით, სასურველია ოფციონის განაღდების გადაწყვეტილების მიღება დროის,გარკვეული აზრით,ოპტიმალურ შემთხვევით მომენტში,შევნიშნოთ,რომ ასეთი გადაწყვეტილების მიღება წარმოადგენს შემთხვევით პროცესთა ოპტიმალური გაჩერების თეორიის საინტერესო და რთულ მათემატიკურ ამოცანას.კერძოდ, ჩვენთვის საინტერესო აქტივის ყოფაქცევაზე დაკვირვების საშუალებით,

საჭიროა ვიპოვოთ ოფციონის განაღდების ისეთი შემთხვევითი მომენტი (ოპტიმალური გაჩერების მომენტი),რომ მივიღოთ მაქსიმალური საშუალო მოგება ანუ ფასი. ჩვენ მოკლედ შევეხებით ამერიკული ოფციონის გათვლის ზოგიერთ მარტივ საკითხს ფინანსური (B,S) ბაზრის ბინომური მოდელის შემთხვევაში.

2. ვიგულისხმოთ,რომ ჩვენ ვიხილავთ (B,S)-ბაზრის ბინომურ მოდელს

$$B_n=(1+r)\,B_{n-1},\qquad B_0>0, \tag{6.1}$$

$$S_n=(1+\rho_n)\,S_{n-1},\qquad S_0>0, \tag{6.2}$$

სადაც n=0,1,…,N. ამერიკული ოფციონის მფლობელს შეუძლია მისი წარდგენა გასანაღდებლად დროის ამ მომენტიდან ნებისმიერ (შემთხვევით არჩულ) მომენტში. ვიგულისხმოთ,რომ გვაქვს გადახდის ფუნქცია,რომელიც n მომენტისთვის ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$f = f_n = f_n(S_0, S_1, \dots, S_n)\,,\qquad n=0,1,\dots,N. \tag{6.3}$$

ანუ გვაქვს შემდეგი სიდიდეების მიმდევრობა:

$$f_0 = f_0(S_0),$$

$$f_1 = f_1(S_0, S_1),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$f_n = f_n(S_0, S_1, \dots, S_n)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$f_N = f_N(S_0, S_1, \dots S_n \dots, S_N)$$

ცხადია, თუ ოფციონის მფლობელი წარადგენს ოფციონს დროის რაიმე τ შემთხვევით მომენტში,იგი მიიღებს თანხას (გასამრჯელოს), რომელიც ტოლია $f_\tau(S_0, S_1, \dots, S_\tau)$, τ=0,1,...,N, სიდიდის.

ამერიკული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გადახდის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$f_n = (S_N - K)^+ = max(S_N - K, 0) \tag{6.4}$$

სადაც K>0 შეთანხმების ფასია.

ამერიკული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონის გადახდის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$f_n = (K - S_N)^{+} = max(K - S_N, 0) \qquad (6.5)$$

სადაც K>0 შეთანხმების ფასია.

ამერიკული ოფციონის გათვლის დროს ევროპული ოფციონის გათვლის დროს ემიტენტის ამოცანებს ემატება ოფციონის განაღდების ე.წ. რაციონალური (ოპტიმალური) მომენტების პოვნა,რომელიც საკმაოდ ართულებს ამერიკული ოფციონის გათვალს. ამიტომ დამატებით საჭიროა ისეთი გაჩერების მომენტის (განაღდების მომენტის) პოვნა, რომ მივიღოთ მაქსიმალური საშუალო გასამრჯელო.

3. განვიხილოთ ახლა ფინანსური (B,S) -ბაზრის მონაწილე ემიტენტის ამოცანა,რომელმაც ოფციონის გაყიდვით მიიღო გარკვეული საწყისი თანხა X_0=x>0. ვთქვათ,გადახდის ფუნქცია მოცემულია (6.3) ტოლობით.ვიტყვით,რომ ემიტენტის სტრატეგია (პორტფელი) π=$\pi_{n}=(\beta_{n}, \gamma_n)$ არის (x,f,N) ჰეჯი (ამერიკული ტიპის ჰეჯი), თუ ემიტენტის საწყისი კაპიტალი

$$X_0^{\pi} = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0 = x, \qquad (6.6)$$

და ნებისმიერი n, $0 \le n \le N$, მომენტისთვის გვაქვს

$$X_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{\pi}} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n \ge f_n(S_0, S_1, \dots, S_n) \qquad (6.7)$$

ამასთან ერთად, თუ რომელიმე გაცერების τ მომენტი ისეთია,რომ

$$X_{\tau}^{\boldsymbol{\pi}} = \beta_{\tau} B_{\tau} + \gamma_{\tau} S_{\tau} = f_{\tau}(S_0, S_1, \dots, S_{\tau}), \qquad (6.8)$$

მაშინ π= $\pi_\tau = (\beta_{\tau}, \gamma_\tau)$ სტრატეგიას მინიმალური (x,f,N) ჰეჯი ეწოდება.

აღვნიშნოთ ამერიკული ტიპის ჰეჯების ერთობლიობა $\prod^{A}$ (x,f,N) სიმბოლოთი.

შევნიშნოთ,რომ თუ π სტრატეგია აკმაყოფილებს (6.8) ტოლობას, მაშინ ნებისმიერი τ≤N გაჩერების მომენტისათვის სრულდება (6.7) უტოლობა.

საინვესტიციო თანხა (ოფციონის სამართლაინი ფასი) ეწოდება სიდიდეს

$$C_N^A = \inf\{x > 0;\ \prod^{A} (\mathrm{x, f, N}) \neq \emptyset\}, \qquad (6.9)$$

გაჩერების მომენტს $\tau^* \le N$ ეწოდება რაციონალური (ამერიკული ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტი), თუ C_N^A საწყისი თანხისთვის (კაპიტალისათვის) და თვითდაფინანსებადი π სტრატეგიისათვის სამართლიანია უტოლობა:

$$X_{\tau*}^{\pi} \ge f_{\tau^*}(S_0, S_1, \dots, S_{\tau^*}) \qquad (6.10)$$

და სინამდვილეში გვაქვს ტოლობა:

$$X_{\tau*}^{\pi} = f_{\tau^*}(S_0, S_1, \dots, S_{\tau^*}) \qquad (6.11)$$

გავიხსენოთ, რომ π= $\pi_n = (\beta_{\mathrm{n}}, \gamma_{\mathrm{n}})$ სტრატეგიას ეწოდება თვითდაფინანსებადი, თუ დროის n მომენტში სრულდება $B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0$ ტოლობა, სადაც $\Delta\beta_n = \beta_n - \beta_{n-1}$, $\Delta\gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$. ასეთ შემთხვევაში გვაქვს:

$$\mathrm{X}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{\pi}} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n = X_0^\pi + \sum_{k=1}^{n}(\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k) ,$$

სადაც $\Delta B_k = B_k - B_{k-1}$, $\Delta S_k = S_k - S_{k-1}$.

განვიხილოთ ახლა ე.წ. დისკონტირებული კაპიტალი

$$M_n^\pi = \frac{X_n^\pi}{B_n}. \tag{6.12}$$

M_n^π შემთხვევით მიმდევრობას გააჩნია შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება: ნებისმიერი τ≤N გაჩერების მომენტისათვის

$$E^*(M_\tau^\pi) = M_0^\pi \tag{6.13}$$

სადაც E^* აღნიშნავს:

$$p^* = \frac{r-a}{b-a} \tag{6.14}$$

ალბათობით გასაშუალოებას (მათემატიკური ლოდინის ოპერაცია). (6.13) ტოლობის თანახმად შეგვძლია დავწეროთ :

$$\mathrm{X}_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{\pi}} = E^*(1+r)^{-\tau}\, X_\tau^\pi \tag{6.15}$$

ცხადია,რომ თუ π სტრატეგია არის (x,f,N) ჰეჯი, მაშინ

$$x \geq E^*(1+r)^{-\tau}\, f_\tau \tag{6.16}$$

სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა გაჩერების მომენტით τ≤N. იმ შემთხვევაში,როცა π არის მინიმალური ჰეჯი, ანუ არსებობს ისეთი გაჩერების მომენტი τ*≤N, რომ $X_{\tau*}^\pi = f_{\tau^*}$, მაშინ

$$x = \mathrm{X}_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{\pi}} = E^*(1+r)^{-\tau^*} f_{\tau^*} = E^*(1+r)^{-\tau^*} f_\tau, \tag{6.17}$$

და

$$x = sup_\tau E^*(1+r)^{-\tau}\, f_\tau \tag{6.18}$$

სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა გაჩერების მომენტით τ≤N. ამრიგად (6.18) ტოლობა წარმოადგენს π ჰეჯის მინიმალურობის აუცილებელ პირობას.

შეიძლება ჩვენება,რომ (6.18) ტოლობა ემიტენტის საწყის x თანხასა და f_τ გადახდის ფუნქციებს შორის დამოკიდებულება წარმოადგენს აგრეთვე π ჰეჯის მინიმალურობის

საკმარის პირობას. აქედან გამომდინარე, ამერიკული ოფციონის სამართლიანი ფასი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$C_N^{A} = sup_\tau\, E^*(1+r)^{-\tau^*} f_\tau \qquad (6.19)$$

სადაც ისე,როგორც ზემოთ, სუპრემუმი აიღება ყველა გაჩერების მომენტით τ≤N.

$$C_N^{A} = sup_\tau\, E^*(1+r)^{-\tau^*} f_\tau = E^*(1+r)^{-\tau^*} f_{\tau^*} \qquad (6.20)$$

ევნიშნოთ,რომ სწორედ (6.19) სახის სუპრემუმებისა და τ^* სახის გაჩერების (რაციონალური,ოპტიმალური) მომენტების სტრუქტურის გარკვევა და მათი მონახვა წარმოადგენს გაჩერების თეორიის ძირითად ამოცანებს.

ამერიკული ოფციონის გათვლის დროს (ისევე,როგორც ევროპული ოფციონის გათვლის დროს) ჩვენს შეიძლება გამოვიყენოთ ბინომური ხეები და მოპასუხე პორტფელის პრინციპი. N -ნაბიჯიანი ბინომური ხის კვანძებში აქციის შესაძლო ფასები დაითვლება შემდეგი ტოლობებით:

$$S_N = S_{N,j} = S_0(1+b)^j(1+a)^{N-j}, \qquad j=0,1,\ldots,N \qquad (6.21)$$

ხოლო ბოლო n=N მომენტში N+1 ფინალურ კვანძში ოფციონის ფასები (გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობებით) დაითვლება შემდეგი ტოლობებით:

$$f = f_{N,j} = f(S_{N,j}) \qquad j=0,1,\ldots,N \qquad (6.22)$$

სადაც f არის რაიმე გადახდის ფუნქცია.

ოფციონის მიმდინარე (შიგა) ფასები და სამართლიანი ფასი დაითვლება შემდეგი სქემის მიხედვით.

დროის n=N-1 მომენტში (ფინალურის წინა N კვანძებში) გვექნება

$C_{N-1,j}^{A}=\max\{f_{N-1,j};\ (1+r)^{-1}[p^* f_{N,j+1} + (1-p^*) f_{N,j}]\}; \qquad j=0; 1,\ldots, N-1;$

დროის n=N-1 მომენტში გვექნება

$C_{N-2,j}^{A}=\max\{f_{N-2,j};\ (1+r)^{-1}[p^* C_{N-1,j+1}^{A} + (1-p^*)\, C_{N-1,j}^{A}]\}; \qquad j=0; 1,\ldots, N-2;$

და ა.შ. დროის n=N-k მომენტში გვექნება:

$C_{N-k,j}^{A}=\max\{f_{N-k,j};\ (1+r)^{-1}[p^* C_{N-k+1,j+1}^{A} + (1-p^*)\, C_{N-k+1,j}^{A}]\}; \qquad j=0; 1,\ldots, N-k;$

და ა.შ. დროის n=N=N=0 მომენტში გვექნება:

$C_N^{A}=C_{0,0}^{A} = \max\{\, f(S_0);\ (1+r)^{-1}[p^* C_{1,1}^{A} + (1-p^*)\, C_{1,0}^{A}]\};$

სადაც $f(S_0)= f(S_{0,0})= f_{0,0}$
ამ დამოკიდებულებაში p^* სიდიდე განიმარტება (6.14) ტოლობით.

ამრიგად, ბინომური ხეები გამოიყენება ევროპული და ამერიკული ოფციონების გათვლის (ფასდადების) ამოცანების გადაწყვეტაში. კერძოდ, შესაძლებელია აქციის და ოფციონის ფასების ევოლუციის აღწერა და ბინომური ხის კვანძებში მათი ყველა შესაძლო მნიშვნელობის გამოთვლა ოფციონის სამართლიანი ფასის ჩათვლით.

შევნიშნოთ,რომ ამერიკული ოფციონის გათვლის დროს მინიმალური ჰეჯის და მისი შესაბამისი კაპიტალის პროცესის აგება ისევ მოპასუხე პორტფელის პრინციპის გამოყენებით ხდება. გავიხსენოთ, რომ

$$\beta^*_{n+1} = \frac{(1+b)\mathrm{f}\big((1+a)S_n\big)-(1+a)\mathrm{f}((1+b)S_n)}{(1+r)(b-a)B_n}, \qquad (6.23)$$

$$\gamma^*_{n+1} = \frac{\mathrm{f}\big((1+b)S_n\big)-\mathrm{f}((1+a)S_n)}{(b-a)S_n} \qquad (6.24)$$

$$\mathrm{X}^{\pi^*}_{\mathrm{n}} = \beta^*_{n+1}B_n+\gamma^*_{n+1}S_n = (1+r)^{-1}[\, p^*\,\mathrm{f}\big((1+b)S_n\big)+(1-\ p^*)\,\mathrm{f}\big((1+a)S_n\big)\,] \qquad (6.25)$$

რაც შეეხება ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტის პოვნას, როგორც აღვნიშნეთ, იგი, საზოგადოდ, რთულ ამოცანას წარმოადგენს, ჩვენ მოვიტანთ ამერიკული ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტის ერთ მარტივ წესს ბინომური ხის გამოყენების შემთხვევაში, წესი შემდეგში მდგომარეობს: ამერიკული ოფციონის აღსრულების რაციონალური მომენტი არის დროის ის პირველი მომენტი,როდესაც ოფციონის ფასი (გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობა) გაუტოლდება ან აღემატება მის ფასს. ამრიგად, რაციონალური მომენტისათვის გვაქვს:

$$\tau^* = \min\{\mathrm{n}: f(S_{\mathrm{n}}) \geq C^A_n\} \qquad (6.26)$$

ახლა ავაგოთ ამერიკული ოფციონისათვის ორნაბიჯიანი ბინომური ხე. ქვემოთ ჩვენ სწორედ ამ შემთხვევისთვის განვიხილავთ ევროპული და ამერიკული ოფციონებისათ სამართლიანი ფასების შედარების და ამერიკული ოფციონების ფასების შედარების და ამერიკული ოფციონის გათვლის რიცხვით მაგალითებს.

(6.21)-(6.26) ტოლობების მიხედვით N=2, j=0,1,2, შემთხვევაში

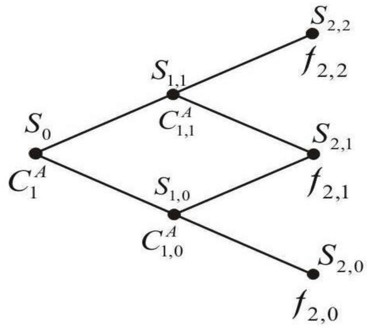
$$S_2=S_{2,j}=S_0\ S_0(1+b)^j(1+a)^{2-j}, \qquad j=0,1,2 \qquad (6.27)$$

$$f=f_2=f_{2,j}=f(S_{2,j}), \qquad j=0,1,2 \qquad (6.28)$$

$$C^A_{1,j}=\max\{f_{1,j};\ (1+r)^{-1}[p^*f_{2,j+1}+(1-p^*)f_{2,j}]\}, \qquad j=0,1. \qquad (6.29)$$

$$C^A_{0,j}=C^A_2=\max\{\ f_{0,j}(1+r)^{-1}\,[p^*C^A_{1,j+1}+(1-p^*)\ C^A_{1,j}]\}; \qquad j=0,1 \qquad (6.30)$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 6.1

§ 7. არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიები

1.აქამდე ვიხილავთ ისეთ სტრატეგიებს, რომელიც აკმაყოფილებს თვითდაფინანსების (1.17) პირობას. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ვგულისმობდით,რომ ინვესტირების პროცესსი არ ხდება დამატებითი კაპიტალის არც შემოდინება და არც გადინება, ე.ი. კაპიტალის პროცესის აგება ხდება მხოლოდ საწყისი თანხის გამოყენებით. არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების შემთხვევაში ინვესტირების პროცესში ხდება გარკვეული თანხის გათვალისწინება.

განვიხილოთ ფინანსური (B,S) ბაზარი (1.1), (1.2) და დავუშვათ რომ განსაზღვრული გვაქვს ფუნქციათა რაიმე მიმდევრობა $g=(g_n)$, n=0,1,…,N, $g_0=0$. გარდა ამისა,ვიგულისხმოთ,რომ ინვესტორების საწყისი თანხა X_0=x>0.

ვთქვათ, დროის n-1 მომენტში აგებული გვაქვს $\pi_{n-1}=(\beta_{n-1},\gamma_{n-1})$ პორტფელი,რომლის შესაბამის კაპიტალს აქვს შემდეგი სახე:

$$X_{n-1}^{\boldsymbol{\pi}}=\beta_{n-1}B_{n-1}+\gamma_{n-1}S_{n-1} \qquad (7.1)$$

დროის n-1 მომენტში უნდა ავაგოთ ახალი $\pi_n=(\beta_n,\gamma_n)$ პორტფელი ისე,რომ გავითვალისწინოთ g_n ფუნქციის მნიშვნელობა. კერძოდ, β_n და γ_n სიდიდეები ისეთი უნდა იყოს,რომ შესრულდეს შემდეგი ტოლობა:

$$X_{n-1}^{\boldsymbol{\pi}}=\beta_{n}B_{n-1}+\gamma_{n}S_{n-1} \qquad (7.2)$$

აქედან გამომდინარეობს,რომ თუ $g_n>0$, მაშინ (7.1) ტოლობით მოცემული $X_{n-1}^{\boldsymbol{\pi}}$ თანხა მცირდება g_n სიდიდით (მაგალითად,ხდება g_n თანხის გადადება რაიმე მოხმარებაზე). თუ $g_n<0$, მაშინ (7.1) ტოლობით მოცემული $X_{n-1}^{\boldsymbol{\pi}}$ თანხა გაიზრდება სიდიდით (მაგალითად დივიდენდების ხარჯზე). ქვემოთ განვიხილავთ მხოლოდ $g_n>0$, n=0,1,…,N, $g_0=0$ შემთხვევას.

დროის n მომენტში ობლიგაციის და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით პორტფელის შესაბამისი თანხა იქნება:

$$X_{n}^{\boldsymbol{\pi}}=\beta_{n}B_{n}+\gamma_{n}S_{n} \qquad (7.3)$$

გამოვაკლოთ (7.3) ტოლობას (7.1) ტოლობა, გვექნება:

$$\Delta X_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{\pi}} = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n + \Delta\beta_n B_{n-1} + \Delta\gamma_n S_{n-1} \quad (7.4)$$

იგივე (7.1) ტოლობას გამოვაკლოთ (7.2) ტოლობა, გვექნება:

$$\Delta X_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{\pi}} = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n - g_n \quad (7.5)$$

ახლა (7.4) ტოლობას გამოვაკლოთ (7.5) ტოლობა,გვექნება:

$$\Delta\beta_n B_{n-1} + \Delta\gamma_n S_{n-1} + g_n = 0 \quad (7.6)$$

ბოლო ტოლობიდან გამომდინარეობს,რომ როცა g_n=0 , n=0,1,…,N მაშინ (7.6) ტოლობა გადაიქცევა თვიდაფინანსების (1.17) პირობად. შევნიშნოთ,რომ არათვიდაფინანსებად სტრატეგიებს შორის ხშირად g დაფინანსებადი სტატეგიები ეწოდება.

ჩავწეროთ (7.6) ტოლობა დროის n=1 და n=2 მომენტების შემთხვევაში. შესაბამისად გვექნება:

$$\Delta\beta_1 B_0 + \Delta\gamma_1 S_0 + g_1 = 0 \quad (7.7)$$

$$\Delta\beta_2 B_1 + \Delta\gamma_2 S_1 + g_2 = 0 \quad (7.8)$$

2. განვიხილოთ ახლა g_n ფუნქციის ის კერძო შემთხვევა, როცა ინვესტორების პროცესში ხდება გარკვეული თანხის გადადება რაიმე მოხმარებაზე ობლიგაციის და აქციის ფასების პროპორციულად. კერძოდ, ვიგულისხმოთ,რომ

$$g_n = c_1 B_{n-1} + c_2 S_{n-1}, \quad g_0 = 0, \quad (7.9)$$

სადაც $0<c_1<1$, $0<c_2<1$, n=0,1,…,N

გარდა ამისა,დავუშვათ,რომ გვაქვს ევროპული ტიპის ოფციონი რაიმე $f = f_N$ გადახდის ფუნქციით. ქვემოთ განვიხილავთ ოფციონის გათვლის ამოცანაში ერთნაბიჯიანი და ორნაბიჯიანი ბინომური ხეებისა და არათვიდაფინანსებადი სტრატეგიების აგების საკითხებს.

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა N=1, ე.ი. n=0.1. ამ შემთხვევაში ერთნაბიჯიანი ბინომური ის ასაგებად გამოვიყნოთ (2.3)-(2.6) ტოლობები, რომლის თანახმად გვექნება:

$$S_{1,0} = S_0(1+a) \quad (7.10)$$

$$S_{1,1} = S_0(1+b) \quad (7.11)$$

$$f_{1.0} = f(S_{1,0}) \quad (7.12)$$

$$f_{1.1} = f(S_{1,1}) \quad (7.13)$$

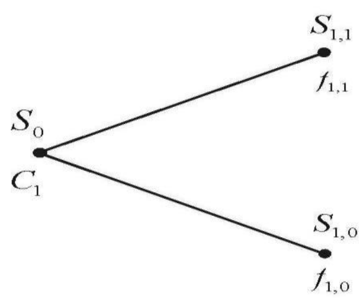
აღვნიშნოთ, C_1 -ით ($C_{0,0}$ -ით) ოფციონის სამართლიანი ფასი,რომლის გადახდის ფუნქციაა $f = f_1$.

შევნიშნოთ,რომ არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების შეთხვევაში ოფციონის საწყის ფასს პირობითად ოფციონის სამართლიან ფასს ვუწოდებთ. (2.12) და (7.9) ტოლობების გამოყენებით გვექნება:

$C_1 = C_1 + g_1 = (1 + r)^{-1} [p^* f_{1,1} + (1-p^*) f_{1;0}] + c_1 B_0 + c_2 S_0$ (7.14)

სადაც p^* სიდიდე განმარტებულია (2.7) ტოლობით. (7.14) ტოლობიდან ვხედავთ,რომ არათვიდაფინანსებადი სტრატეგიის შემთხვევაში ოფციონის სამართლიანი ფასის გამოთვლისათვის საჭიროა თვითდაფინანსებადი სტრატეგიის შემთხვევაში ოფციონის სამართლიან ფასს დავუმატოთ (1.9) ტოლობით მოცემული დროის n=1 მომენტში მოხმარებაზე გადასადები თანხა.

ამრიგად ერთნაბიჯიან ბინომურ ხეს ქნება შემდეგი სახე:



ნახ. 7.1

რაც შეეხება მინიმალური ჰეჯისა და მისი შესაბამისი კაპიტალის აგების საკითხებს,ამისათვის უნდა გამოვიყენოთ მოპასუხე პორტფელის პრინციპი. (3.17) , (3.18) ტოლობების თანახმად მინიმალური ჰეჯი $\pi_1^*=(\beta_1^*, \gamma_1^*)$ მოიცემა შემდეგი ტოლობებით:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)f_{1,0} - (1+a)f_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} \quad (7.15)$$

$$\gamma_1^* = \frac{f_{1,1} - f_{1,0}}{(b-a)S_0} \quad (7.16)$$

$\pi_1^*=(\beta_1^*, \gamma_1^*)$ პორტფელის შესაბამისი $X_0^{\pi^*}$ კაპიტალისთვის (3.14), (3.19) და (7.9) ტოლობების გათვალისწინებით გვექნება:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0 + c_1 B_0 + c_2 S_0 \quad (7.17)$$

$$X_0^{\pi^*} = (1 + r)^{-1} [\, p^* f_{1,1} + (1- p^*) f_{1,0} \,] + c_1 B_0 + c_2 S_0 \quad (7.18)$$

დროის n=1 მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, π_1^*=(β_1^*, γ_1^*) მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი $X_1^{\pi^*}$ კაპიტალი ტოლი იქნება (ზუსტად უპასუხებს) ოფციონის $f(S_1)$ ფასის მნიშვნელობის , ე.ი. შესრულდება ტოლობა:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0 = f(S_1) \qquad (7.19)$$

ვიგულისხმოთ ახლა, რომ N=2, ე.ი. n=0,1,2. ამ შემთხვევაში ორნაბიჯიანი ბინომური ხის ასაგებად გამოვიყენოთ (2.15)-(2.20) ტოლობები,გვექნება:

$$S_{2,0} = S_0\,(1 + a)^2; \qquad (7.20)$$

$$S_{2,1} = S_0\,(1 + b)(1 + a); \qquad (7.21)$$

$$S_{2,2} = S_0\,(1 + b)^2; \qquad (7.22)$$

$$f_{2,0} = f(S_{2,0}); \qquad (7.23)$$

$$f_{2,1} = f(S_{2,1}); \qquad (7.24)$$

$$f_{2,2} = f(S_{2,2}); \qquad (7.25)$$

დროის n=1 მომენტში ოფციონის მიმდინარე ფასები $f = f_2$ გადახდის ფუნქციით აღვნიშნოთ $C1,0$-ით და $C1,1$-ით. (2.23)-(2.25) და (7.19) ტოლობების გამოყენებით გვექნება:

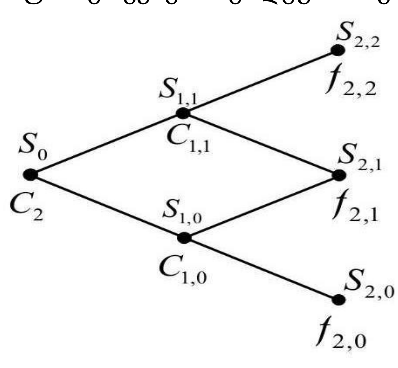
$$C_{1,0} = C_{1,0} + g_2 = (1 + r)^{-1}\,[p^*\, f_{2,1} + (1-p^*) f_{2;0}] + c_1 B_1 + c_2 S_{1,0} \qquad (7.26)$$

$$C_{1,1} = C_{1,1} + g_2 = (1 + r)^{-1}\,[p^*\, f_{2,2} + (1-p^*) f_{2;2}] + c_1 B_1 + c_2 S_{1,1} \qquad (7.27)$$

ოფციონის C_2 ($C_{0,0}$) სამართლიანი ფასი (2.25) და (7.9) ტოლობების გამოყენებით გამოითვლება შემდეგი ტოლობით:

$$C_2 = C_2 + g_1 = (1 + r)^{-1}\,[p^*\, C_{1,1} + (1-p^*)\, C_{1,0}] + c_1 B_0 + c_2 S_0 \qquad (7.28)$$

ამრიგად,ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 7.2

ავაგოთ ახლა მინიმალური ჰეჯი დროის n=0 მომენტში. (3.24), (3.25) ტოლობების თანახმად გვექნება:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)C_{1,0}-(1+a)C_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} \tag{7.29}$$

$$\gamma_1^* = \frac{C_{1,1}-C_{1,0}}{(b-a)S_0}, \tag{7.30}$$

დროის n=0 მომენტში აგებული $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)$ პორტფელის შესაბამისი $X_0^{\pi^*}$ კაპიტალისათვის (3.22) , (3.23) და (7.9) ტოლობების გათვალისწინებით გვექნება:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0+\gamma_1^* S_0 + c_1 B_0+c_2 S_0 \tag{7.31}$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+r)^{-1}[\, p^*\, C_{1,1}+(1-\, p^*)\, C_{1,0}\,]+ c_1 B_0+c_2 S_0 \tag{7.32}$$

დროის n=0 მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)$ პორტფელის შესაბამისი $X_1^{\pi^*}$ კაპიტალი (3.26) ტოლობის ანალოგიურად მოიცემა ტოლობით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1+\gamma_1^* S_1= f(S_1) \tag{7.33}$$

ამ თანხით დროის n=1 მომენტში უნდა ავაგოთ $\pi_2^*=(\beta_2^*,\gamma_2^*)$ მინიმალური ჰეჯი. (3.27), (3.28) ტოლობების ანალოგიურად გვექნება:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)f\big((1+a)S_1\big)-(1+a)f((1+b)S_1)}{(1+r)(b-a)B_1}, \tag{7.34}$$

$$\gamma_1^* = \frac{f\big((1+b)S_1\big)-f((1+a)S_1)}{(b-a)S_1}, \tag{7.35}$$

დროის n=1 მომენტში (7.27) , (7.28) ტოლობებით აგებული $\pi_2^*=(\beta_2^*,\gamma_2^*)$ პორტფელის შესაბამისი $X_1^{\pi^*}$ კაპიტალისათვის (3.29), (3.30) და (7.9) ტოლობების გათვალისწინებით გვექნება:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_2^* B_1+\gamma_2^* S_1+ c_1 B_1+c_2 S_1 \tag{7.36}$$

$$X_1^{\pi^*} = (1+r)^{-1}[\, p^*\, f\big((1+b)S_1\big)+(1-\, p^*)\, f\big((1+a)S_1\big)] +c_1 B_1+c_2 S_1 \tag{7.37}$$

დროის n=2 მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით $\pi_2^*=(\beta_2^*,\gamma_2^*)$ მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალი $X_2^{\pi^*}$ ტოლი იქნება (ზუსტად უპასუხებს) ოფციონის $f(S_2)$ ფასის მნიშვნელობის, ე.ი. შესრულდება ტოლობა:

$$X_2^{\pi^*} = \beta_2^* B_2+\gamma_2^* S_2= f(S_2) \tag{7.38}$$

3.ვთქვათ, ინვესტირების პროცესში ხდება გარკვეული თანხის გადადება რაიმე მოხმარებაზე $g = g_n$. გუნქციის გათვალისწინებით,რომელიც მოიცემა შემდეგი ტოლობით:

$$g_n = c_1\beta_n B_{n-1} + c_2\, \gamma_n S_{n-1} \qquad (7.39)$$

სადაც, ისე როგორც (7.9) ტოლობაში $0<c_1<1$, $0<c_2<1$, $n=0,1,\dots,N$,ხოლო $\pi_n=(\beta_n,\gamma_n)$ არის დროის n მომენტში აგებული რაიმე პორტფელი. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი მოიცემა ტოლობით:

$$X_n^{\pi} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n \qquad (7.40)$$

დროის n მომეტში უნდა ავაგოთ ახალი $\pi_{n+1} = (\beta_{n+1},\gamma_{n+1})$ პორტფელი ისეთი,რომ შესრულდეს შემდეგი ტოლობა:

$$X_n^{\pi} = \beta_{n+1}B_n + \gamma_{n+1}S_n + g_{n+1} = \beta_{n+1}B_n + \gamma_{n+1}S_n + c_1\beta_{n+1}B_n + c_2\, \gamma_{n+1}S_n = (1+c_1)\beta_{n+1}B_n + (1+c_2)\,\gamma_{n+1}S_n\,. \qquad (7.41)$$

მოპასუხე პორტფელის პრინციპის თანახმად $\pi_{n+1}^* = (\beta_{n+1}^*,\gamma_{n+1}^*)$ მინიმალური ჰეჯის ასაგებად დროის n მომენტში (3.7), (3.8) ტოლობების თანახმად გვაქვს:

$$\beta_{n+1}^* = \frac{(1+b)f\big((1+a)S_n\big)-(1+a)f\big((1+b)S_n\big)}{(1+r)(b-a)B_n}, \qquad (7.42)$$

$$\gamma_{n+1}^* = \frac{f\big((1+b)S_n\big)-f\big((1+a)S_n\big)}{(b-a)S_n} \qquad (7.43)$$

სადაც $f = f_N$ ევროპული ტიპის ოფციონის რაიმე გადახდის ფუნქციაა.

შევიტანოთ β_{n+1}^* და γ_{n+1}^* სიდიდეების (7.42) და (7.43) გამოსახულებები X_n^{π} კაპიტალის (7.41) წარმოდგენაში β_{n+1} და γ_{n+1} სიდიდეების მაგივრად, მაშინ მარტივი გარდაქმნებით (3.11) ტოლობის ანალოგიურად მივიღებთ:

$$X_n^{\pi^*} = \frac{1+c_1}{1+r}\left[p^* f\big((1+b)S_n\big) + (1-p^*) f\big((1+a)S_n\big)\right] \qquad (7.44)$$

სადაც, $$p^* = \frac{r-c_1(1+a)+c_2(1+r)-a}{(b-a)(1+c_1)} \qquad (7.45)$$

ხოლო $$1-p^* = \frac{b+c_1(1+b)-c_2(1+r)-r}{(b-a)(1+c_1)} \qquad (7.46)$$

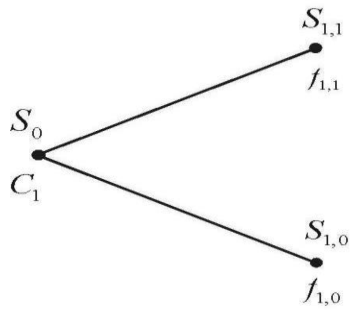
განვიხილოთ ახლა ევროპული ტიპის ოფციონის გათვლის ამოცანაში ერთნაბიჯიანი და ორნაბიჯიანი ბინომური ხეებისა და არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების აგების საკითხები. იგულისხმება,რომ ინვესტირების პროცესში ხდევბა გარკვეული თნხის გადადება რაიმე მოხმარებაზე, (7.39) ტოლობის გათვალისწინებით.

ჯერ განვიხილოთ N=1 შემთხვევა. ე.ი. n=0,1. ამ შემთხვევაში ერთნაბიჯიანი ბინომური ხის ასაგებად შეგვიძლია გამოვიყენოთ (7.10)-(7.13) ტოლობები. რაც შეეხება ოფციონის სამართლიან ფასს, იგი გამოითხვლება (2.12) ტოლობის ანალოგიურად შემდეგნაირად:

$C_1=C_{0,0}=\frac{1+c_1}{1+r}\ [p^* f_{1,1} + (1 - p^*) f_{1,0}]$ (7.47)

სადაც p^* სიდიდე გამოითვლება (7.45) ტოლობით.

ამრიგად,ერთნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 7.3

დროის n=0 მომენტისათვის ავაგოთ $\pi_1^*=(\beta_1^*, \gamma_1^*)$ მინიმალური ჰეჯი და ამ ჰეჯის შესაბამისი $X_0^{\pi^*}$ კაპიტალი. (7.16), (7.17) ტოლობების ანალოგიურად გვექნება:

$$\beta_1^*=\frac{(1+b)f_{1,0}-(1+a)f_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} \quad (7.48)$$

$$\gamma_1^* =\frac{f_{1,1}-f_{1,0}}{(b-a)S_0} \quad (7.49)$$

(7.41), (7.44) ტოლობების გამოყენებით გვექნება:

$$X_0^{\pi^*} = (1 + c_1)\beta_1^* B_0+(1 + c_2)\gamma_1^* S_0 \quad (7.50)$$

$$X_0^{\pi^*} = \frac{1+c_1}{1+r}[\, p^*\, f_{1,1}+(1- \, p^*)\, f_{1,0}\,] \quad (7.51)$$

სადაც p^* სიდიდე გამოითვლება (7.45) ტოლობით.

დროის n=1 მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, $\pi_1^*=(\beta_1^*, \gamma_1^*)$ მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი $X_1^{\pi^*}$ კაპიტალი ტოლი იქნება (ზუსტად უპასუხებს) ოფციონის $f(S_1)$ ფასის მნიშვნელობის , ე.ი. შესრულდება ტოლობა:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1+\gamma_1^* S_1= f(S_1) \quad (7.52)$$

ვთქვათ, ახლა N=2, ე.ი. n=0,1,2. ამ შემთხვევაში ორნაბიჯიანი ბინომური ხის ასაგებად შეგვიძლია გამოვიყენოთ (7.20)-(7.25) ტოლობები. დროის n=1 მომენტში ოფციონის მიმდინარე ფასები და აგრეთვე ოფციონის სამართლიანი ფასი გამოითვლება შემდეგი ტოლობებით:

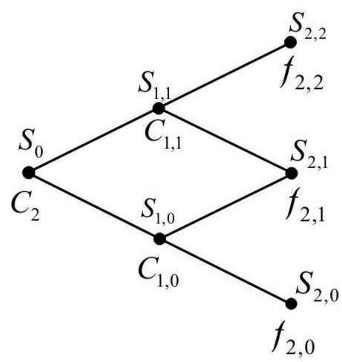
$$C_{1,0}{}'=\frac{1+c_1}{1+r}\ [\mathrm{p}^* f_{2,1} + (1-\mathrm{p}^*) f_{2,0}] \tag{7.53}$$

$$C_{1,1}{}'=\frac{1+c_1}{1+r}\ [\mathrm{p}^* f_{2,2} + (1-\mathrm{p}^*) f_{2,1}] \tag{7.54}$$

$$C_{2}{}'=\frac{1+c_1}{1+r}\ [\mathrm{p}^* C_{1,1}{}' + (1-\mathrm{p}^*) C_{1,0}{}'] \tag{7.55}$$

სადაც p^* სიდიდე გამოითვლება (7.45) ტოლობით.

ამრიგად,ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 7.4

ავაგოთ მინიმალური ჰეჯი დროის n=0 მომენტში. (7.29), (7.30) ტოლობების ანალოგიურად გვექნება:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)C_{1,0}{}'-(1+a)C_{1,1}{}'}{(1+r)(b-a)B_0} \tag{7.56}$$

$$\gamma_1^*=\frac{C_{1,1}{}'-C_{1,0}{}'}{(b-a)S_0}\,, \tag{7.57}$$

სადაც $C_{1,1}{}'$ და $C_{1,0}{}'$ სიდიდეები გამოითვლება, შესაბამისად, (7.53), (7.54) ტოლობებით.

დროის n=0 მომენტში (7.56), (7.57) ტოლობებით აგებული π_1^*=(β_1^*, γ_1^*) პორტფელის შესაბამისი $X_0^{\pi^*}$ კაპიტალისათვის (7.50) , (7.51) ტოლობების ანალოგიურად გვექნება:

$$X_0^{\pi^*} = (1+c_1)\beta_1^* B_0 + (1+c_2)\gamma_1^* S_0 \tag{7.58}$$

$$X_0^{\pi^*} = \frac{1+c_1}{1+r}[\, p^*\, C_{1,1}{}' + (1- \ p^*)\ C_{1,0}{}'\,] \tag{7.59}$$

სადაც $C_{1,1}{}'$ და $C_{1,0}{}'$ სიდიდეები გამოითვლება, შესაბამისად, (7.53), (7.54) ტოლობებით.

დროის n=1 მომენტში გვექნება შემდეგი ტოლობა:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1 = \mathrm{f}(S_1) \tag{7.60}$$

ამ თანხით, დროის n=1 მომენტში (7.34), (7.35) ტოლობების გამოყენებით უნდა ავაგოთ π_2^*=(β_2^*, γ_2^*) მინიმალური ჰეჯი. ამ ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალი დროის n=1 მომენტში (7.41), (7.42) ტოლობების თანახმად ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*} = (1+c_1)\beta_2^* B_1 + (1+c_2)\gamma_2^* S_1 \quad (7.61)$$

$$X_1^{\pi^*} = \frac{1+c_1}{1+r}\,[p^* f\big((1+b)S_n\big) + (1-p^*) f\big((1+a)S_n\big)\,] \quad (7.62)$$

დროის n=2 მომენტში π_2^*=(β_2^*, γ_2^*) პორტფელის შესაბამისი $X_2^{\pi^*}$ კაპიტალი ტოლი იქნება (ზუსატდ უპასუხებს) ოფციონის f(S_2) ფასის მნიშვნელობას, ე.ი. შესრულდება ტოლობა:

$$X_2^{\pi^*} = \beta_2^* B_2 + \gamma_2^* S_2 = f(S_2) \quad (7.63)$$

ამრიგად, არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების შემთხვევაში, (7.9), (7.39) ტოლობების გათვალისწინებით, გადავწყვიტეთ ევროპული ტიპის ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი და ორნაბიჯიანი ამოცანები.

ბოლოს განვიხილოთ ზოგადი გადახდის ფუნქცია,რომელიც დამოკიდებულია აქციათა ფასების მთელ წარსულზე $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ და ვიგულისხმოთ,რომ $g = g_n$, n=0,1,…,N, ფუნქციას აქვს (7.39) სახე. ასეთ შემთხვევაში შეიძლება ვაჩვენოთ,რომ სამართლიანია შემდეგი ფაქტები:

1) ოფციონის სამართლიანი ფასი მოიცემა ტოლობით:

$$C_N = E^*[\left(\frac{1-c_1}{1+r}\right)^N f_N] \quad (7.64)$$

სადაც E^* აღნიშნავს (7.45) ტოლობით განმარტებული p^* ალბათობით გასაშუალებას.

2) π_n^*=(β_n^*, γ_n^*) , n=0,1,…,N, მინიმალური ჰეჯის კომპტონენტები გამოითვლება შემდეგი ტოლობებით:

$$\beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi^*} - \gamma_n^* S_{n-1}(1-c_2)}{B_{n-1}(1-c_1)} \quad (7.65)$$

$$\gamma_n^* = \frac{\alpha_n^* B_n}{S_{n-1}(1-c_1)} \quad (7.66)$$

სადაც α_n^* არის $\rho_1, \ldots, \rho_n$ სიდიდეების გარკვეული ფუნქცია, ხოლო $X_n^{\pi^*}$ დროის n მომენტში π_n^* პორტფელით აგებული თანხაა.

§ 8. სამაქტივიანი ფინანსური ბაზარი (საკვლევი მაგალითი)

განვიხილოთ ფინანსური ბაზარი (B,S)=(B_n,S_n),რომელიც იმართება შემდეგი ტოლობებით:

$$B_n=(1+r_n)\,B_{n-1}, \qquad B_0>0, \tag{8.1}$$

$$S_n=(1+\rho_n)\,S_{n-1}, \qquad S_0>0, \tag{8.2}$$

სადაც a< $r^{(i)}$<b, i=1,2.

$$B_n=B_n^{(1)}+B_n^{(2)} \tag{8.3}$$

$$B_n^{(1)}=(1+r^{(1)})\,B_{n-1}^{(1)} \tag{8.4}$$

$$B_n^{(2)}=(1+r^{(2)})\,B_{n-1}^{(2)} \tag{8.5}$$

$$r_n=\frac{r^{(1)}\,B_{n-1}^{(1)}+r^{(2)}\,B_{n-1}^{(2)}}{B_{n-1}^{(1)}+B_{n-1}^{(2)}} \tag{8.6}$$

დროის n მომენტში $\pi_n=(\beta_n;\ \gamma_n)$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_n^{\pi}=\beta_n B_n+\gamma_n S_n=\beta_n(B_n^{(1)}+B_n^{(2)})+\gamma_n S_n,$$

ხოლო თვითდაფინანსებადი პირობა

$$\Delta\beta_n(B_{n-1}^{(1)}+B_{n-1}^{(2)})+\Delta\gamma_n S_{n-1}=0 \tag{8.7}$$

სადაც $\Delta\beta_n=\beta_n-\beta_{n-1}$, $\Delta\gamma_n=\gamma_n-\gamma_{n-1}$.

განვსაზღვროთ p_n^*ალბათური ზომა შემდეგი პირობით:

$$E(\rho_n-r_n)=bp+a(1-p)-r_n=0,$$

გვექნება:

$$p_n^*=\frac{r_n-a}{b-a} \tag{8.8}$$

ამრიგად, ბინომური ხის ასაგებად და მოპასუხე პორტფელის მინიმალური ჰეჯის ასაგებად ჩვენ დროის ყოველ n მომენტში შეგვიძლია გამოვიყენოთ r_n საპროცენტო განაკვეთი და p_n^* ალბათური ზომა.

განვიხილოთ მაგალითისთვის ორნაბიჯიანი ბონომური ხის კვანძით წერტილებში სიდიდეების გამოთვლა.

ფინალური სამ კვანძში გვაქვს სიდიდეები:

$S_{2,0} = S_0\,(1 + a)^2;$ $\quad f_{2,0} = f(S_{2,0});$ (8.9)

$S_{2,1} = S_0\,(1 + b)(1 + a);$ $\quad f_{2,1} = f(S_{2,1});$ (8.10)

$S_{2,2} = S_0\,(1 + b)^2;$ $\quad f_{2,2} = f(S_{2,2});$ (8.11)

სადაც $f = f_2$ რაიმე გადახდის ფუნქციაა. შემდეგ გვაქვს:

$$C_{1,1}=(1+r_2)^{-1}\,[p_2{}^*f_{2,2} + (1-p_2{}^*)f_{2,1}] \quad (8.12)$$

$$C_{1,0}=(1+r_2)^{-1}\,[p_2{}^*f_{2,1} + (1-p_2{}^*)f_{2,0}] \quad (8.13)$$

$$C_2=(1+r_1)^{-1}\,[p_1{}^*C_{1,1} + (1-p_1{}^*)C_{1,0}] \quad (8.14)$$

მოპასუხე პორტფელის პრინციპის თანახმად მინიმალური ჰეჯი $\pi_n^*=(\beta_n^*,\gamma_n^*)$, n=1,2. გამოითვლება შემდეგი ტოლობებით $S_0 \to S_{1,1}$ ტრაექტორიის შემთხვევაში:

$$\beta_1^*=\frac{(1+b)C_{1,0}-(1+a)C_{1,1}}{(1+r_1)(b-a)\,(B_0{}^{(1)}+B_0{}^{(2)})} \quad (8.15)$$

$$\gamma_1^* = \frac{C_{1,1}-C_{1,0}}{(b-a)S_0} \quad (8.16)$$

$$\beta_2^*=\frac{(1+b)f_{2,1}-(1+a)f_{2,2}}{(1+r_2)(b-a)(B_1{}^{(1)}+B_1{}^{(2)})} \quad (8.17)$$

$$\gamma_2^* = \frac{f_{2,2}-f_{2,1}}{(b-a)S_{1,1}} \quad (8.18)$$

ანალოგიურად აიგება მინიმლაური ჰეჯები $S_0 \to S_{1,0}$ ტრაექტორიის შემთხვევაში.

ბოლოს განვიხილოთ საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითი შემდეგი მონაცემებისათვის და ევროპული ყიდვის სტანდარტული ოფციონისათვის, როცა N=2, n=0,1,2.

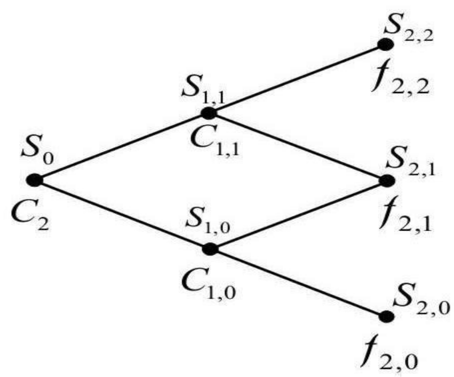
$B_0{}^{(1)}$=40, $\quad r^{(1)}=\frac{1}{4}$, $\quad B_0{}^{(2)}$=50, $\quad r^{(2)}=\frac{1}{5}$, (8.19)

(I)

$S_0 = 200$, $\quad a=-\frac{1}{5}$, $\quad b=\frac{4}{5}$, $\quad$ K=200

მაგალითი.

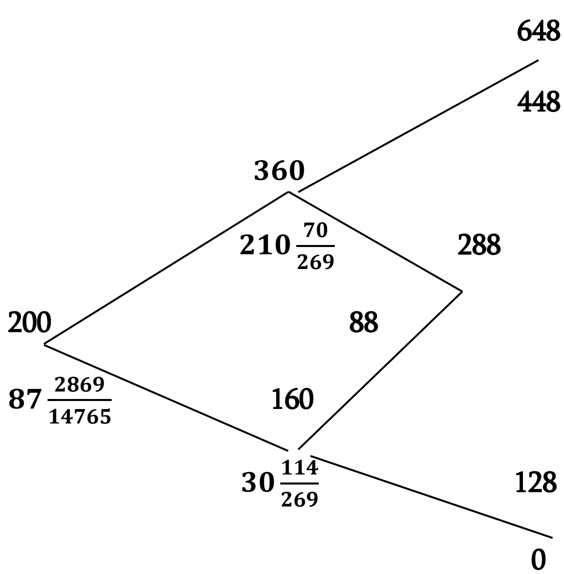
ვთქვათ,გვაქვს (I) რიცხვითი მონაცემები. გადავწყვიტეთ ევროპული ტიპის სტანდარტული ოფციონის ფასდადების ორნაბიჯიანი ამოცანა $S_0 \to S_{1,1}$ ტრაექტორიის შემთხვევაში. ბინომური ხე (8.6), (8.8) და (8.9)-(8.14) ფორმულების გამოყენებით გვექნება:



(8.19) რიცხვითი მონაცემების შემთხვევაში ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:

$S_0 = 200$, $C_2 = 87\frac{2869}{14765}$, $S_{1,1} = 360$, $S_{1,0} = 160$, $S_{2,2} = 648$, $S_{2,1} = 288$

$S_{2,0} = 128$, $C_{1,1} = 210\frac{70}{269}$, $C_{1,0} = 30\frac{114}{269}$, $f_{2,2}$=448, $f_{2,1} = 88$, $f_{2,0}$=0.



დასკვნა:

ჩვენ განვიხილეთ ორაქტივიანი და სამაქტივიანი ფინანსური ბაზრის ბინომური მოდელი.ასევე განვიხილეთ ორაქტივიანი ფინანსური ბაზრის ბინომურ მოდელთან დაკავშირებული საკითხები,როგორიც იყო საინვესტიციო პრობლემა და ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების ამოცანა. განვიხილეთ ბინომური ხეები და მოპასუხე პორტფელის პრონციპი,ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული ოფციონების ფასდადების ამოცანის საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები,ამერიკული ოფციონის ფასდადება და სამაქტივიანი ბაზრის საკითხები.

გამოყენებული ლიტერატურა.

1. პ. ბაბილუა, ბ. დოჭვირი, პ.მელაძე., ფინანსური მათემატიკის საწყისები. უნივერსალი, თბილისი, 2008.
2. ა. თავაძე, ფინანსური მატემატიკა. EMS, თბილისი, 2007.
3. ნ. ლაზრიევა, მ. მანია, გ. მირზაშვილი, თ. ტორონჯაძე, ო. ღლონტი,ლ.ჯამბურია. ფინანსური მათემატიკის ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები, ფინანსური და სადაზღვეო მათემატიკა,ფინანსური ინჟინერია, ფონდი „ევრაზია", თბილისი, 1999.
4. ო.ღლონტი, სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა. თსუ, თბილისი 2002.
5. Бочаров П.П., Касимов Ю. Финансовая математика . Москва . 2007
6. Уотшен Т. Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах. Москва, 1998
7. Ширяев. А..Основы стохастической финансовой математики, Москва, 1998