ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

გიორგი გოგნაძე

# ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების ჩეზაროს განზოგადოებული საშუალოების ასიმპტოტური შეფასების შესახებ

(სამაგისტრო ნაშრომი)

ხელმძღვანელი: თსუ-ს ასოც. პროფ.
ფიზ. მათ. მეცნ. დოქტორი
თეიმურაზ ახობაძე

2016 წელი

# ს ა რ ჩ ე ვ ი

# ანოტაცია

ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების შეჯამებადობის საკითხი მეტად მნიშნელოვან როლს თამაშობს ფუნქციათა თეორიის მრავალი პრობლემების შესწავლაში; მათდამი ინტერესი განსაკუთრებით გაიზარდა მას შემდეგ, რაც აღმოჩდა, რომ ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი შეიძლება ყველგან განშლადი იყოს, ხოლო ზოგიერთი უწყვეტი ფუნქციის მწკრივი ასევე განშლადი იყოს ნული ზომის სიმრავლეზე. გასული საუკუნის 40-ანი წლებიდან დაწყებული ინტესიური კვლევა მიმდენარეობს სხვადასხვა სივრცეებში ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების შესაბამისი ფუნქციიდან გადახრის ასიმპტოტური შეფასების შესახებ. მოცემულ სამაგისტრო ნაშრომში ნაპოვნია $H_{\omega}$ კლასის ფუნქციების ასიმპტოტური ტოლობები ჩეზაროს განზოგადოებული საშუალოებითვის.

# Abstract

The convergence of the trigonometric Fourier series plays an important role in examination of many problems in function theory. Many scientists paid attention on them after that Fourier series of integrated function can be diverge everywhere. Moreover, some series of continuous functions diverge on set of zero measure. Since 1940, intensive studies is conducted in several spaces to find the asymptotoc estimation of function and its trigonometric Fourier series. This paper finds asymptotic equalities of set of functions from $H_\omega$ class than generalized Cesáro means are considered.

## §1 შესავალი

ვთქვათ $f$ უწყვეტი და $2\pi$ - პერიოდული ფუნქციაა და

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

მისი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივია, ხოლო

$$a_k=a_k\left(f\right)=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(t\right)\cos ktdt\,,$$

$$b_k=b_k\left(f\right)=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(t\right)\sin ktdt\,,$$

$f$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებია. $S_n\left(f;x\right)$-ით აღვნიშნოთ $f$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის $n$ - ური კერძო ჯამი, ანუ

$$S_n\left(f;x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right).$$

პირველი შედეგი ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციდან მისი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კერძო ჯამების გადახრის შეფასების შესახებ მიღებული იქნა ლებეგის [1] მიერ 1909 წელს. მან დაამტკიცა, რომ

(1.1) $$\rho_n\left(f;x\right)\overset{def}{=}\left|f\left(x\right)-S_n\left(f;x\right)\right|\le\left(\ln n+3\right)E_n\left(f\right),$$

სადაც $E_n\left(f\right)$ არის $f$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოვება თანაბარი მეტრიკით $T_n$ ტრიგონომეტრიული პოლინომებით, რომელთა რიგი არ აღემატება $n$-ს :

$$E_n\left(f\right)=\inf_{T_n}\left\|f\left(\cdot\right)-T_n\left(\cdot\right)\right\|_{C_{2\pi}}=\inf_{T_n}\max_{x}\left|f\left(\cdot\right)-T_n\left(\cdot\right)\right|.$$

ამ მიმართულებით ასევე აღსანიშნავია ჯეკსონის [2, 3] დებულებები, რომლებიც ეხება $E_n\left(f\right)$-ით შეფასებებს. ლებეგის მოტანილი შედეგი დიდწილად შეიცავს მანამდე მიღებულ შესაბამის შედეგებს $\rho_n\left(f;x\right)$ სიდიდის შეფასების შესახებ და არ კარგავს თავის მნიშნელობას

დღესაც. ის არის რიგობრივად ზუსტი და მოხერხებულია გამოყენებებში. არსებობს ლებეგის შეფასების მრავალი განზოგადოება, მათ შორის ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას: თუ $f$ ფუნქციას აქვს შემოსაზღვრული, დაუშვათ 1-ით, $r$ რიგის წარმოებული მაშინ

$$E_n(f) < \frac{\pi}{2n^r},$$

ამასთან (1.1)-დან მივიღებთ

$$\rho_n(f;x) < \frac{\pi(\ln n + 3)}{2n^r}.$$

1935 წელს კოლმოგოროვმა [4] განიხილა სიდიდე

$$\varepsilon\left(W^r; S_n\right) = \sup_{f \in W^r} \left\| f(\cdot) - S_n(f;\cdot) \right\|_{C_{2\pi}},$$

სადაც $W^r$ არის $2\pi$ -პერიოდული ისეთი $f$ ფუნქციათა კლასი, რომელბსაც გააჩნია $r$ რიგის წარმოებული $f^r(x), r \in \mathrm{N}$, და თ.ყ. $\left| f^r(x) \right| \le 1$. მან $\varepsilon\left(W^r; S_n\right)$-სთვის იპოვა ზუსტი ასიპტოტური შეფასება :

$$\varepsilon\left(W^r; S_n\right) = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right),\ n \to \infty.$$

ამ მიმართულებით შემდეგი არსებითი ნაბიჯი, ეკუთვნის ნიკოლსკის [5-11], რომელმაც განაზოგადა ეს შედეგები $W^r H^\alpha$ კლასებზე ($W^r H^\alpha$ კლასი შეიცავს $2\pi$ - პერიოდულ $f$ ფუნქციებს, რომლებსაც აქვს $r$ რიგის უწყვეტი წარმოებულები, ამასთანავე, $\left| f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x') \right| \le |x - x'|,\ 0 < \alpha \le 1.$ )

კერძოდ, მან დაადგინა, რომ ნებისმიერი $r \ge 0$ და $0 < \alpha \le 1$ რიცხვებისათვის, მართებულია წარმოდგენა

$$\varepsilon\left(W^r H^\alpha, S_n\right) = \frac{2^{1+\alpha} \ln n}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t dt + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

ამის გარდა, ნიკოლსკიმ მიიღო ანალოგიური შეფასება, $\sigma_n(f;x)$ ჯამებისთვის.

მოგვიანებით კორნეიჩუკმა [12] დაამტკიცა დებულება, რომელსაც უწოდებენ კორნეიჩუკი-სტეჩკინის ლემას. მან მიიღო შემდეგი სიდიდის შეფასება:

(1.2) $$\delta\left(H_\omega[a,b];\psi\right)=\sup_{f\in H_\omega[a,b]}\left|\int_a^b f(t)\psi(t)\,dt\right|,$$

სადაც $H_\omega[a,b]$ ისეთი $f$ ფუნქციათა კლასია, რომელებიც $[a,b]$-ზე აკმაყოფილებენ პირობას

$$|f(x)-f(x')|\le\omega(|x-x'|);$$

$\omega(t)$ ფიქსირებული უწყვეტობის მოდულია, ხოლო $\psi(t)$ ჯამებადი ფუნქციაა, რომლის $[a,b]$-ზე აღებული საშუალო მნიშნელობა 0-ის ტოლია. ამასთან, ის თ.ყ. ინარჩუნებს ნიშანს, მაგალითად, $(a,c)$-ზე და $(c,b)$-ზე, $a<c<b$. (1.2) გამოსახულების შეფასება, როცა $\omega(t)$ ამოზნექილი უწყვეტობის მოდულია, არის ზუსტი, თანაც მოიცემა ცხადი სახით.

კორნეიჩუკი-სტეჩკინის ლემაზე დაყრდნობით სტეპანეცმა მიიღო მთელი რიგი დებულებები. მოვიტანოთ ზოგიერთი მათგანი.

***თეორემა* 1.1.** (*ნიკოლსკი* [8], *სტეპანეცი* [13, *თავი* II, §5]) *ნებისმიერი უწყვეტობის მოდულისთვის მართებულია შეფასება*:

(1.3) $$\varepsilon(H_\omega;S_n)\le\frac{2}{\pi^2}\ln n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{4t}{2n+1}\right)\sin t\,dt+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),\ n\to\infty.$$

*თუ* $\omega(t)$ *ამოზნექილი უწყვეტობის მოდულია, მაშინ* (1.3)-*ში მიიღწევა ტოლობა.*

***თეორემა* 1.2.** (*სტეპანეცი* [13, *თავი* II, §5]) *ნებისმიერი* $\omega=\omega(t)$ *უწყვეტობის მოდულისათვის მართებულია ასიპტოტური ტოლობა*:

$$\varepsilon\left(H_\omega,S_n\right)=\frac{2s_n}{\pi^2}\ln n+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),\ n\to\infty,$$

*სადაც*

$$s_n = \sup_{f \in H_\omega\left[-\frac{\pi}{2n+1}, \frac{\pi}{2n+1}\right]} \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{2t}{2n+1}\right) \sin t dt \right|.$$

*თეორემა* 1.3. (*სტეპანეცი* [13, *თავი* II, §5) *ნებისმიერი* $\omega = \omega(t)$ *უწყვეტობის მოდულისთვის სამართლიანია ასიპტოტური ტოლობა:*

$$\varepsilon(H_\omega, S_n) = \Theta_\omega \frac{2}{\pi^2} \ln n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4t}{2n+1}\right) \sin t dt + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$\frac{2}{3} \le \Theta_\omega \le 1,$$

*ამასთანავე,* $\Theta_\omega = 1$, *თუ* $\omega(t)$ *ამოზნექილი ფუნქციაა.*

## §2 დამხმარე დებულებები და აღნიშნები

***განსაზღვრება* 2.1.** ვთქვათ მოცემულია $f$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია $[a,b]$-ზე, მაშინ ამ ფუნქციის უწყვეტობის მოდული აღინიშნება ასე $\omega(t)=\omega(f;t)$. ის განსაზღვრულია $[0,b-a]$-ზე, და განისაზღვრება ტოლობებით:

$$\omega(t)=\omega(f;t)=\sup_{0\le h\le t}\max_{a\le x\le b-h}\left|f(x+h)-f(x)\right|=\sup_{\substack{|x'-x''|\le t,\\ x',x''\in[a,b]}}\left|f(x')-f(x'')\right|.$$

***განსაზღვრება* 2.2.** ვთქვათ, $\omega=\omega(t)$ ფიქსირებული უწყვეტობის მოდულია. ვიტყვით, რომ $f$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $[a,b]$-ზე, ეკუთვნის $H_\omega[a,b]$ კლასს, თუ ნებისმიერი $t_1,t_2\in[a,b]$ რიცხვებისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$\left|f(t_1)-f(t_2)\right|\le\omega(|t_1-t_2|).$$

ვთქვათ, ნებისმიერ $[a,b]$ მონაკვეთზე მოცემულია წერტილი $c$, $a<c<b$, და ჯამებადი $\psi$ ფუნქცია, რომლისთვისაც თითქმის ყველგან $(a,c)$-ზე $\psi(x)>0$ ($\psi(x)<0$), ხოლო თითქმის ყველგან $(c,b)$-ზე $\psi(x)<0$ ($\psi(x)>0$) და $\int_a^b\psi(x)\,dx=0$. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ $\psi$ ფუნქცია ეკუთვნის $V_{a,b}^c$ კლასს და დავწერთ $\psi\in V_{a,b}^c$.

დაუშვათ, რომ

$$\delta_\omega(\psi)=\delta_\omega(\psi;H_\omega[a,b])=\sup_{f\in H_\omega[a,b]}\left|\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx\right|,$$

სადაც $\psi\in V_{a,b}^c$.

***თეორემა* 1.1.** (*კორნეიჩუკი* [12]) *ვთქვათ,* $\omega=\omega(t)$ *ნებისმიერი უწყვეტობის მოდულია, მაშინ*

**(2.1)** $$\delta_\omega(\psi)\le\int_a^c|\psi(t)|\,\omega(\rho(t)-t)\,dt=\int_c^b|\psi(t)|\,\omega(t-\rho^{-1}(t))\,dt,$$

*სადაც* $\rho$ *ფუნქციაა, რომელიც განსაზღვრულია* $[a,c]$*-ზე შემდეგი ტოლობით:*

$$\Psi(x)=\Psi(\rho(x)),\ a\le x\le c\le \rho(x)\le b,\ \Psi(x)=\int_a^x \psi(t)\,dt,$$

*სადაც* $\rho^{-1}$ *არის* $\rho$ *ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. თუ* $\omega$ *ამოზნექილი უწყვეტობის მოდულია, მაშინ* **(2.1)**-*ის მარჯვენა მხარეში მიიღწევა ტოლობა, ამასთანავე, ამ შემთხვევაში ზუსტ ზედა საზღვარს აღწევს ისეთი ფუნქციისათვის* $H_\omega[a,b]$ *კლასიდან, რომელსაც აქვს სახე* $K\pm f_0(x)$, *სადაც* $K$ *მუდმივია, ხოლო*

**(2.2)**
$$f_0(x)=\begin{cases} -\int_x^c \omega'(\rho(t)-t)\,dt, & \text{თუ } x\in[a,c],\\ \int_c^x \omega'(t-\rho^{-1}(t))\,dt, & \text{თუ } x\in[c,b].\end{cases}$$

*ამ შემთხვევაში* $\delta_\omega(\psi)$ *სიდიდე შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით*

$$\delta_\omega(\psi)=\int_0^{b-a}\bar{\psi}(t)\omega'(t)\,dt,$$

*სადაც* $\bar{\psi}(t)$ *არის* $|\psi(t)|$ *ფუნქციის კლებადი გადანაცვლება (იხ. მაგალითად А.И. „Степанец равномерные приближения тригонометрическими полиномами“ გვ.* 18).

***შედეგი*** **2.1.** *ვთქვათ,* $\omega=\omega(t)$ *ნებისმიერი უწყვეტობის მოდულია,* $\psi(t)\in V_{a,b}^c$, $c=\dfrac{a+b}{2}$ *და* $\psi(t)=-\psi(2c-t)$, *მაშინ*

**(2.3)**
$$\delta_\omega(\psi)\le\int_a^c|\psi(t)|\,\omega(2(c-t))\,dt=\int_c^b|\psi(t)|\,\omega(2(t-c))\,dt.$$

*თუ* $\omega$ *ამოზნექილი უწყვეტობის მოდულია, მაშინ* **(2.3)**-*ის მარჯვენა მხარეში მიიღწევა ტოლობა, და, ამასთანავე, ზუსტ ზედა საზღვარს აღწევს ისეთი ფუნქციისათვის* $H_\omega[a,b]$ *კლასიდან, რომელსაც აქვს სახე* $K\pm f_*(x)$, *სადაც* $K$ *მუდმივია, ხოლო*

$$f_*(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}\omega(2(c-x)), & \text{თუ } x\in[a,c],\\ \frac{1}{2}\omega(2(x-c)), & \text{თუ } x\in[c,b].\end{cases}$$

*ამ შემთხვევაში* $\delta_\omega(\psi)$ *სიდიდე შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით*

$$\delta_\omega(\psi) = \int_0^{b-a} \bar{\psi}(t)\,\omega'(t)\,dt .$$

მნიშნელოვანია ამ მიმართულებით კვლევის გაგრძელება ჩეზაროს შეჯამებადობის მეთოდისთვის. მომავალში დაგვჭირდება

***განსაზღვრება* 2.3.** ვთქვათ, მოცემულია $s_0, s_1, \ldots$ მიმდევრობა. ვიტყვით, რომ $s_0, s_1, \ldots$ მიმდევრობა (ან მწკრივი $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$, რომლის კერძო ჯამები არის $s_0, s_1, \ldots$) $(C, \alpha_n)$ შეჯამებადია $s$ -სკენ, თუ

$$\sigma_n^{\alpha_n} \to s \text{, როცა } n \to \infty,$$

სადაც $\sigma_n^{\alpha_n}(x) = \dfrac{1}{A_n^{\alpha_n}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n} S_k(x)$, $\alpha_n$ ნებიმიერი მიმდევრობაა, რომლისთვისაც $-1 < \alpha_n < 1$, და $S_k(x)$ არის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის $k$ -ური კერძო ჯამი, ამასთან $A_n^{\alpha_n} = \dfrac{(\alpha_n + 1) + \ldots + (\alpha_n + n)}{n!}$.

იმ შემთხვევაში, როცა $\alpha_n$ მუდმივი მიმდევრობაა: $\alpha_n = \alpha$ ყოველი $n \in \mathbf{N}$, მაშინ $\sigma_n^{\alpha_n} = \sigma_n^{\alpha}$ არის ჩვეულებრივი ჩეზაროს საშუალოები. სამართლიანია

***თეორემა* 2.3.** [14] *ნებისმიერი $\omega$ უწყვეტობის მოდულისთვის და ყოველი $\alpha$ -სთვის $(-1 < \alpha < 1)$ მართებულია შეფასება:*

$$\textbf{(2.4)} \quad \varepsilon\left(H^\omega; \sigma_n^\alpha\right) \overset{def}{=} \sup_{f \in H_\omega} \left\| f(x) - \sigma_n^\alpha(f; x) \right\|_{C_{2\pi}} \le \frac{4\Gamma(\alpha+1)}{\pi(2n+1+\alpha)n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( 2\sin\frac{k+1+\alpha/2}{2n+1+\alpha}\pi \right)^{-1-\alpha} \times$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4t}{2n+1+\alpha}\right) \sin t\,dt + o\left( \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt \right).$$

*თუ $\omega(t)$ ამოზნექილი უწყვეტობის მოდულია, მაშინ* **(2.4)***-ში მიიღწევა ტოლობა.*

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს

***შედეგი* 2.2.** [14] *ნებისმიერი $\alpha(-1 < \alpha < 0)$ და $\gamma(0 < \lambda \le 1)$ მართებილია ასიმპტოტური ტოლობა:*

$$\varepsilon\left(MH_{\gamma};\sigma_n^{\alpha}\right)\le\frac{4^{1+\gamma}M\Gamma(\alpha+1)}{\pi(2n+1+\alpha)^{1+\gamma}n^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{k+1+\frac{\alpha}{2}}{2n+1+\alpha}\pi\right)^{-1-\alpha}\times$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^{\gamma}\sin t dt+o\left(\varphi(n)\right).$$

*სადაც* $\varphi(n)=1/n^{\gamma}$ *ან* $\varphi(n)=\ln n/n$ *იმის მიხედვით, თუ* $0<\gamma<1$ *ან* $\gamma=1$.

კერძოდ ამ შედეგიდან, როცა $\gamma=1$, მივიღებთ:

$$\varepsilon\left(MH_1;\sigma_n^{\alpha}\right)=\frac{16M\Gamma(\alpha+1)}{\pi(2n+1+\alpha)^2 n^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{k+1+\frac{\alpha}{2}}{2n+1+\alpha}\pi\right)^{-1-\alpha}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

მომავალში დაგვჭირდება შემდეგი ორი დებულება.

***ლემა* 2.1.** *თუ* $\alpha_n\in(-1,1)$, *მაშინ*

$$A_n^{\alpha_n}=\frac{n^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\},$$

*სადაც* $\Gamma(x)$ *არის ეილერის ფუნქცია.*

**დამტკიცება**: თუ გამოვიყენებთ [15 თავი XIV, პუნქტი 533], მაშინ ყოველი დადებითი $a$ - სათვის და ნატურალური $k$ -სათვის გვექნება:

$$\Gamma(a)\le k^{a}\frac{(k-1)!}{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+k-1)}\le\Gamma(a)\frac{a+k}{k}.$$

თუ გავითვალისწინებთ $A_k^{\alpha_n}$ განსაზღვრებას, მაშინ ნებისმიერი $\alpha_n$ მიმდევრებობისთვის მივიღებთ:

$$\frac{k^{1-\alpha_n}}{\Gamma(1+\alpha_n)(1+\alpha_n+k)}\le A_k^{\alpha_n}\le\frac{k^{\alpha_n}}{\Gamma(1+\alpha_n)},$$

ამრიგად,

$$A_k^{\alpha_n} = \frac{k^{\alpha_n}}{\Gamma(1+\alpha_n)}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

*ლემა* **2.2.** [16] *ნებისმიერი ნატურალური* $n$ *-სათვის სამართლიანია შეფასება:*

$$\left|K_n^{\alpha_n}(x)\right| \le \frac{n}{1+\alpha_n} + \frac{1}{2}.$$

*სადაც* $K_n^{\alpha_n}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n-\nu}^{\alpha_n}}{A_n^{\alpha_n}} \cos \nu x$ .

## §3 ძირითადი შედეგების ფორმულირება

ვთქვათ, $H$ ყველა იმ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლეა $H_\omega$ კლასიდან, რომლისთვისაც $f(0)=0$. $\sigma_n^{\alpha_n}(x, f)$-ით აღნიშნულია $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის ჩეზაროს განზოგადოებული საშუალო.

ნაშრომში მიღებულია $\sigma_n^{\alpha_n}(x, f)$-ის ასიმპტოტური შეფასება.

***თეორემა 3.1.*** *ნებისმიერი უწყვეტობის მოდულისთვის* $\omega=\omega(t)$, *და* $\alpha_n \in (-1,1)$ *მიმდევრობისთვის მართებულია უტოლობა:*

$$\varepsilon_n\left(H_\omega;\sigma_n^{\alpha_n}\right)=\sup_{f\in H_\omega}\left\| f(x)-\sigma_n^{\alpha_n}(f;x)\right\|_{C_{2\pi}} \le$$

$$\le \frac{4}{(2n+1+\alpha_n)\pi A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{k+1/2+\alpha_n/2}{2n+1+\alpha_n}\right)^{-1-\alpha_n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{4t}{2n+1+\alpha_n}\right)\sin t dt+$$

$$+O\left(\Gamma(1+\alpha_n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{|\alpha_n|}{n}\int_0^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right),\ n\to\infty.$$

*თუ* $\omega(t)$ *ამოზნექილი უწყვეტობის მოდულია, მაშინ ზემოთ დაწერილ გამოსახულებაში მიიღწევა ტოლობა.*

***თეორემა 3.2.*** *ნებისმიერი* $\omega=\omega(t)$ *უწყვეტობის მოდულისთვის და* $\alpha_n \in (-1,1)$ *მიმდევრობისთვის მართებულია ასიმპტოტური ტოლობა:*

$$\varepsilon_n\left(H_\omega;\sigma_n^{\alpha_n}\right)=\frac{4R_n(\omega)}{\pi(2n+1+\alpha_n)A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{k+1/2+\alpha_n/2}{2n+1+\alpha_n}\pi\right)^{-1-\alpha_n}+$$

$$+O\left(\Gamma(1+\alpha_n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right)\right),\ n\to\infty,$$

*სადაც*

$$R_n(\omega)=\sup_{f\in H_\omega\left[\frac{-\pi}{2n+1+\alpha_n},\frac{\pi}{2n+1+\alpha_n}\right]}\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{2t}{2n+1+\alpha_n}\right)\sin t dt\right|.$$

შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელ დებულებაში არ მოითხოვება უწყვეტობის მოდულის ამოზნექილობა.

***თეორემა 3.3.*** თუ $\omega=\omega(t)$ *უწყვეტობის მოდულია და* $\alpha_n\in(-1,1)$, *მაშინ სამართლიანია ასიმპტოტური ტოლობა:*

$$\varepsilon_n\left(H_\omega;\sigma_n^{\alpha_n}\right)=\Theta_\omega\frac{4}{\pi(2n+1+\alpha_n)A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{k+1/2+\alpha_n/2}{2n+1+\alpha_n}\pi\right)^{-1-\alpha_n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{4t}{2n+1+\alpha_n}\right)\sin t dt+$$

$$+O\left(\Gamma(1+\alpha_n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right)\right),\ n\to\infty,$$

*სადაც*

$$\frac{2}{3}\le\Theta_\omega\le 1,$$

*ამასთან,* $\omega(t)$ *ამოზნექილი უწყვეტობის მოდულის შემთხვევაში* $\Theta_\omega=1$.

## §4 შედეგების დამტკიცება

*თეორემა* **3.1**-*ის დამტკიცება* : $\sigma_n^{\alpha_n}(x,f)$ განსაზღვრებიდან (იხ. განსაზღვრება **2.3)** მივიღებთ, რომ

$$\sigma_n^{\alpha_n}(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n^{\alpha_n}(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)K_n^{\alpha_n}(t)dt=\sigma_n^{\alpha_n}(0,f_1),$$

სადაც

$$K_n^{\alpha_n}(t)=\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha_n\right)-\frac{1}{2}\pi\alpha_n\right]}{\left(2\sin\frac{1}{2}t\right)^{\alpha_n+1}}+\frac{2\theta_n\alpha_n}{n\left(2\sin\frac{1}{2}t\right)^2},\ |\theta_n|\le 1 \text{ და } -1<\alpha_n<1$$

(იხ. ზიგმუნდი [17] III თავი (5.14)). ამის გარდა, თუ $f_1(t)=f(t+x)$, მაშინ

$$\rho_n^{\alpha_n}(f,x)=f(x)-\sigma_n^{\alpha_n}(x,f)=f_1(0)-\sigma_n^{\alpha_n}(0,f_1)=f_1(0)-\sigma_n^{\alpha_n}(0,f_1)=\rho_n^{\alpha_n}(f_1,0).$$

ამიტომ

$$\varepsilon_n\left(H^{\omega};\sigma_n^{\alpha_n}\right)=\sup_{f\in H^{\omega}}\left|\sigma_n^{\alpha_n}(0,f)-f(0)\right|.$$

მაშასადამე,

$$\sigma_n^{\alpha_n}(0,f)-f(0)=\sigma_n^{\alpha_n}(0,\varphi),$$

სადაც

$$\varphi(t)=f(t)-f(0);$$

ე.ი. $\varepsilon_n\left(H^{\omega};\sigma_n^{\alpha_n}\right)=\sup\limits_{f\in H^{\omega},\,f(0)=0}\left|\sigma_n^{\alpha_n}(0,f)\right|.$

$K_n^{\alpha_n}(t)$ ფუნქცია ლუწია. ამასთან, $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, სადაც $f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ და

$$\varepsilon_n\left(H^{\omega};\sigma_n^{\alpha_n}\right)=\sup_{f\in H^{\omega},\,f(0)=0}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(t)K_n^{\alpha_n}(t)dt\right|,$$

სადაც $f_1(0)=0$, $f_1$ ლუწია და განსაზღვრებით ეკუთვნის ფუნქციათა $H_{iv}$ კლასს. ახლა ძნელი მისახვედრი არ არის, რომ

$$\varepsilon_n\left(H^{\omega};\sigma_n^{\alpha_n}\right)=\sup_{f\in H}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)K_n^{\alpha_n}(t)dt\right|.$$

მაგრამ

$$\varepsilon_n\left(H^{\omega};\sigma_n^{\alpha_n}\right)=\sup_{f\in H}\left|\frac{2}{\pi}\int_{\gamma_n}^{\pi} f(t)K_n^{\alpha_n}(t)dt+\frac{2}{\pi}\int_0^{\gamma_n} f(t)K_n^{\alpha_n}(t)dt\right|=$$

$$=\sup_{f\in H}\left|\frac{2}{\pi}\int_{\gamma_n}^{\pi} f(t)K_n^{\alpha_n}(t)dt+O\left(\omega(\gamma_n)\frac{2n}{1+\alpha_n}\int_0^{\gamma_n}dt\right)\right|=$$

$$=\sup_{f\in H}\left|\frac{2}{\pi}\int_{\gamma_n}^{\pi} f(t)K_n^{\alpha_n}(t)dt\right|+O\left(\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\alpha_n}\right),$$

სადაც

$$\gamma_n=\frac{(1+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}$$

მაშასადამე,

$$\varepsilon_n\left(H^{\omega};\sigma_n^{\alpha_n}\right)=\sup_{f\in H}\left|\frac{2}{\pi A_n^{\alpha_n}}\int_{\gamma_n}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{1+\alpha_n}}dt+\int_{\gamma_n}^{\pi}\frac{f(t)\theta_n(t)}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{2}}dt\right|=$$

$$=\sup_{f\in H}\left|\frac{2}{\pi A_n^{\alpha_n}}\int_{\gamma_n}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{1+\alpha_n}}dt+O\left(\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right)\right|.$$

ვიგულისხმოთ, რომ $x_k$ არის $\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]$ ფუნქციის ნულები, ხოლო $t_k$ - $\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]$ ფუნქციის ნულები. ამრიგად, გვაქვს

$$x_k=\frac{(2k+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}\ ,\qquad (k=\overline{1,n})$$

და

$$t_k=\frac{(2k+\alpha_n+1)\pi}{2n+1+\alpha_n}\qquad (k=\overline{0,n}).$$

შევნიშნოთ, რომ $\gamma_n=t_0$.

ვთქვათ, $M_n(t)=\left(2\sin\frac{x_{k+1}}{2}\right)^{1+\alpha_n}$, როცა $t\in[t_k,t_{k+1})$, $k=\overline{0,n-1}$.

დავუშვათ

$$Q_n^{\alpha_n}(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]}{A_n^{\alpha_n}M_n(t)}, \text{ თუ } [t_0,\pi],\\ 0, \text{ თუ } [0,t_0).\end{cases}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $[t_0,\pi]$შუალედზე

$$\eta_n^{\alpha_n}(t)\equiv\varphi_n^{\alpha_n}(t)-Q_n^{\alpha_n}(t)=\frac{M_n(t)-\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{1+\alpha_n}}{A_n^{\alpha_n}\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{1+\alpha_n}M_n(t)}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n\pi}{2}\right],$$

სადაც

$$\varphi_n^{\alpha_n}(t)=\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]}{A_n^{\alpha_n}\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{1+\alpha_n}}.$$

$\eta_n^{\alpha_n}(t)$ ფუნქცია $[t_k,t_{k+1}]$ შუალედზე დადებითია, როცა $k$ ლუწია და უარყოფითია, როცა $k$ კენტია.

განვიხილოთ რიცხვები

$$\delta_k^{\alpha_n}=\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\eta_n^{\alpha_n}(t)dt\right|.$$

ძნელი შესამოწმებელი არ არის, რომ $k$-ს გაზრდასთან ერთად $\delta_k^{\alpha_n}$-ები იკლებენ. აქედან გამომდინარე ვასკვნით, რომ ფუნქციას

$$\eta_*^{\alpha_n}(\tau)=\int_{\tau}^{\pi}\eta_n^{\alpha_n}(t)dt,$$

ყოველ $(t_k,t_{k+1})$, $k=\overline{0,n-1}$, ინტერვალზე აქვს ერთადერთი ნული (ვთქვათ, $\tau_k$), ამასთან,

$$t_0<\tau_0<t_1<...<\tau_{n-1}<\pi.$$

ამრიგად, მივიღებთ

$$I_n^{\alpha_n}(f)\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)Q_n^{\alpha_n}(t)dt+\frac{2}{\pi}\int_{t_0}^{\pi}f(t)\eta_n^{\alpha_n}(t)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{t_0}^{\pi}f(t)Q_n^{\alpha_n}(t)dt+\frac{2}{\pi}\int_{t_0}^{\tau_0}f(t)\eta_n^{\alpha_n}(t)dt+\frac{2}{\pi}\int_{\tau_0}^{\pi}f(t)\eta_n^{\alpha_n}(t)dt=$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

განვიხილოთ $I_2$. ცხადია, $[t_0,\tau_0]$-ის სიგრძე არ აღემატება $[t_0,t_1]$ ინტერვალის სიგრძეს. ამასთან, ეს უკანასკნელი ტოლია

$$\left(\frac{3+\alpha_n}{2n+1+\alpha_n}-\frac{1+\alpha_n}{2n+1+\alpha_n}\right)\pi=\frac{2\pi}{2n+1+\alpha_n}<\frac{\pi}{n}.$$

ამ ინტერვალზე $\eta_n^{\alpha_n}$ აღწევს თავის უდიდეს მნიშნელობას $t_0$ წერტილზე. ამიტომ

$$|I_2| = \left| \frac{2}{\pi} \int_{t_0}^{\tau_0} f(t) \eta_n^{\alpha_n}(t) dt \right| \le \frac{2}{\pi} \omega(\tau_0) \eta_n^{\alpha_n}(t_0) \frac{\pi}{n} <$$

$$< \frac{2}{\pi} \omega(t_1) \eta_n^{\alpha_n} \left( \frac{(\alpha_n + 1)\pi}{2n + 1 + \alpha_n} \right) < \frac{2}{\pi} \omega \left( \frac{(\alpha_n + 3)\pi}{2n + 1 + \alpha_n} \right) \eta_n^{\alpha_n} \left( \frac{(\alpha_n + 1)\pi}{2n + 1 + \alpha_n} \right),$$

მაგრამ

$$\eta_n^{\alpha_n} \left( \frac{(\alpha_n + 1)\pi}{2n + 1 + \alpha_n} \right) \le \left| \varphi \left( \frac{(\alpha_n + 1)\pi}{2n + 1 + \alpha_n} \right) \right| + \left| Q_n^{\alpha_n} \left( \frac{(\alpha_n + 1)\pi}{2n + 1 + \alpha_n} \right) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \left[ \frac{1}{\left( 2 \sin \frac{(\alpha_n + 1)\pi}{2(2n + 1 + \alpha_n)} \right)^{1 + \alpha_n}} + \frac{1}{\left( 2 \sin \frac{(\alpha_n + 2)\pi}{2(2n + 1 + \alpha_n)} \right)^{1 + \alpha_n}} \right] \le$$

$$\le \frac{2}{A_n^{\alpha_n}} \left( 2 \sin \frac{(\alpha_n + 1)\pi}{2(2n + 1 + \alpha_n)} \right)^{-1 - \alpha_n} \le \frac{C\Gamma(1 + \alpha_n)}{n^{\alpha_n}} \frac{n^{1 + \alpha_n}}{(1 + \alpha_n)} \le C\Gamma(1 + \alpha_n).$$

აქ და ქვემოთ $C$ -თი აღნიშნავთ აბსოლუტურ კონსტანტებს.

მაშასადამე,

$$|I_2| \le C\Gamma(1 + \alpha_n) \omega\left( \frac{1}{n} \right),$$

$$h = \max_i (\tau_{i+1} - \tau_i) < \max_i (t_{i+1} - t_{i-1}) = \max_i \left[ \frac{2i + 3 + \alpha_n}{2n + 1 + \alpha_n} - \frac{2i - 1 + \alpha_n}{2n + 1 + \alpha_n} \right] \pi =$$

$$= \max \frac{4}{2n + 1 + \alpha_n} \pi \le \frac{2\pi}{n}.$$

ამიტომ კორნეიჩუკის თეორემა **1.1**-ის ძალით გვაქვს

$$|I_3| = \left| \frac{2}{\pi} \int_{\tau_0}^{\pi} f(t) \eta_n^{\alpha_n}(t) dt \right| \le \frac{2}{\pi} \omega\left( \frac{2\pi}{n} \right) \int_{\tau_0}^{\pi} \left| \eta_n^{\alpha_n}(t) \right| dt.$$

უკანასკნელი შეიძლება შემდეგნაირად შევაფასოთ:

$$\int_{\tau_0}^{\pi}\left|\eta_n^{\alpha_n}(t)\right|dt=\int_{\tau_0}^{t_1}\left|\eta_n^{\alpha_n}(t)\right|dt+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|\eta_n^{\alpha_n}(t)\right|dt\,.$$

$\eta_n^{\alpha_n}(t)$-ის განსაზღვრების ძალით:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|\eta_n^{\alpha_n}(t)\right|dt=\frac{2}{\pi A_n^{\alpha_n}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|\frac{1}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{1+\alpha_n}}-\frac{1}{\left(2\sin\frac{x_{k+1}}{2}\right)^{1+\alpha_n}}\right|\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt\le$$

$$\le\frac{2}{\pi A_n^{\alpha_n}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|\frac{1}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{1+\alpha_n}}-\frac{1}{\left(2\sin\frac{x_{k+1}}{2}\right)^{1+\alpha_n}}\right|dt=$$

$$=\frac{2}{\pi A_n^{\alpha_n}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(1+\alpha_n\right)\left(2\sin\frac{\xi_k}{2}\right)^{-2-\alpha_n}\cos\frac{\xi_k}{2}\left|t-x_{k+1}\right|dt<$$

$$<\frac{2\left(1+\alpha_n\right)}{\pi A_n^{\alpha_n}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(2\sin\frac{\xi_k}{2}\right)^{-2-\alpha_n}\left(t_{k+1}-t_k\right)dt\le$$

$$\le\frac{2\left(1+\alpha_n\right)}{\pi A_n^{\alpha_n}}\,\frac{2\pi}{2n+1+\alpha_n}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(2\sin\frac{t_k}{2}\right)^{-2-\alpha_n}dt\le$$

$$\le\frac{\left(1+\alpha_n\right)}{\pi A_n^{\alpha_n}}\,\frac{2\pi}{2n+1+\alpha_n}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(2\,\frac{2}{\pi}\,\frac{t_k}{2}\right)^{-2-\alpha_n}dt=$$

$$=\frac{\pi^{2+\alpha_n}\left(1+\alpha_n\right)}{nA_n^{\alpha_n}2^{2+\alpha_n}}\left(\frac{2n+1+\alpha_n}{2k+1+\alpha_n}\right)^{2+\alpha_n}\frac{1}{\pi^{2+\alpha_n}}\,\frac{2\pi}{2n+1+\alpha_n}<$$

$$<\frac{2^{1+\alpha_n}\left(1+\alpha_n\right)n^{1+\alpha_n}2\pi}{nA_n^{\alpha_n}4^{2+\alpha_n}k^{2+\alpha_n}}=\frac{\left(1+\alpha_n\right)n^{1+\alpha_n}\pi}{nA_n^{\alpha_n}2^{2+\alpha_n}k^{2+\alpha_n}}\le$$

$$\le\frac{\left(1+\alpha_n\right)\Gamma\left(1+\alpha_n\right)\pi}{2^{2+\alpha_n}k^{2+\alpha_n}}\le\frac{2\left(1+\alpha_n\right)\Gamma\left(1+\alpha_n\right)}{k^{2+\alpha_n}}\,;$$

მაშასადამე,

$$\frac{2}{\pi}\int_{\tau_0}^{\pi}\left|\eta_n^{\alpha_n}(t)\right|dt \le C(1+\alpha_n)\Gamma(1+\alpha_n)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2+\alpha_n}} \le C(1+\alpha_n)\Gamma(1+\alpha_n)\int_1^n x^{-2-\alpha_n}dx,$$

ამრიგად,

$$I_n^{\alpha_n}(f)=\frac{2}{\pi}\int_{t_0}^{\pi} f(t)Q_n^{\alpha_n}(t)dt+O\left(\Gamma(1+\alpha_n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right);$$

ე.ი.

$$\varepsilon_n\left(H^{\omega},\sigma_n^{\alpha_n}\right)\le\sup_{f\in H}\left|\frac{2}{\pi}\int_{t_0}^{\pi} f(t)Q_n^{\alpha_n}(t)\,dt\right|+O\left(\Gamma(1+\alpha_n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right)=$$

$$=\sup_{f\in H}\left|\frac{2}{\pi A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\alpha_n\pi/2\right]\left(2\sin\frac{k+1+\alpha_n/2}{2n+1+\alpha_n}\pi\right)^{-1-\alpha_n}dt\right|+$$

$$+O\left(\Gamma(1+\alpha_n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right)\le$$

$$\le\frac{2}{\pi A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{k+1+\alpha_n/2}{2n+1+\alpha_n}\pi\right)^{-1-\alpha_n}\sup_{f\in H}\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n\pi}{2}\right]dt\right|+$$
$$+O\left(\Gamma(1+\alpha_n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right).$$

ახალა განვიხილოთ სიდიდე

$$r_k=\sup_{f\in H}\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n\pi}{2}\right]dt\right|.$$

უკანასკნელი გამოსახულებისათვის გამოვიყენოთ კორნეიჩუკის თეორემა **1.1**, ამასთან, ვიგულისხმოთ, რომ $a=t_k$, $b=t_{k+1}$, $c=x_{k+1}$; $\psi(t)=\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]$, მაშინ მივიღებთ

$$r_k\le\int_{x_k}^{t_{k+1}}\left|\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n\pi}{2}\right]\right|\omega\left(2(t-x_{k+1})\right)dt=$$

$$= \int_0^{t_{k+1}-x_{k+1}} \left| \sin\left[ \left( n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha_n}{2} \right) u + (k+1)\pi \right] \right| \omega(2u)\, du =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2n+1+\alpha_n}} \left| \sin\left( n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha_n}{2} \right) \right| u\omega(2u)\, du =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2n+1+\alpha_n}} \sin\left( n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha_n}{2} \right) u\omega(2u)\, du =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\, \omega\left( \frac{2t}{n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha_n}{2}} \right) \frac{dt}{n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha_n}{2}} =$$

$$= \frac{2}{2n+1+\alpha_n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\, \omega\left( \frac{4t}{2n+1+\alpha_n} \right) dt \;;$$

მაშასადამე,

$$\varepsilon_n\left( H^{\omega}, \sigma_n^{\alpha_n} \right) \leq \frac{4}{(2n+1+\alpha_n)\pi A_n^{\alpha_n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left( 2\sin\frac{k+1+\alpha_n/2}{2n+1+\alpha_n} \right)^{-1-\alpha_n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left( \frac{4t}{2n+1+\alpha_n} \right) \sin t dt +$$
$$+ O\left( \Gamma(1+\alpha_n)\, \omega\left( \frac{1}{n} \right) + \frac{|\alpha_n|}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2} dt \right).$$

ამით თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია. ახლა ვაჩვენოთ რომ უკანასკნელ გამოსახულებაში მიიღწევა ტოლობა.

ვთქვათ, $\omega(t)$ ამოზნექილი უწყვეტობის მოდულია. გამოვიყენებთ რა **2.1** შედეგს ყოველ $[t_k + t_{k+1}]$ , $k = \overline{0, n-1}$, მონაკვეთზე , ავაგებთ $f_k(x)$ ფუნქციებს:

$$f_k(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\omega\left(2\left(x_{k+1} - x\right)\right), & \text{თუ } x \in [t_k, x_{k+1}], \\ \frac{1}{2}\omega\left(2\left(x - x_{k+1}\right)\right), & \text{თუ } x \in [x_{k+1}, t_k]. \end{cases}$$

ამ ფუნქციისათვის, ცხადია,

$$\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n\pi}{2}\right]dt\right|=\frac{2}{2n+1+\alpha_n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{4t}{2n+1+\alpha_n}\right)\sin t dt\ ;$$

ვთქვათ, $\hat{f}(x)=(-1)^{k+1}f_k(x)$, $x\in[t_k,t_{k+1}]$ და $k=\overline{0,n-1}$. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f^*(x)=\hat{f}(x)-\frac{1}{2}\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right),$$

ცხადია, რომ $f^*(x)\in H$ და ამასთანავე, $\int_{t_{k+1}}^{t_k}Q_n^{\alpha_n}(t)dt=0$. ამრიგად, გვაქვს:

$$I_n^{\alpha_n}(f^*)=\left|\frac{2}{\pi}\int_{t_0}^{\pi}f^*(t)Q_n^{\alpha_n}(t)dt\right|+O\left(\Gamma(1+\alpha_n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left|\int_{t_0}^{\pi}\hat{f}(t)Q_n^{\alpha_n}(t)dt\right|+O\left(\Gamma(1+\alpha_n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(-1)^{k+1}f_k(t)Q_n^{\alpha_n}(t)dt\right|+O\left(\Gamma(1+\alpha_n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right).$$

რადგან $(-1)^{k+1}f_k(t)Q_n^{\alpha_n}(t)$ ყოველთვის დადებითია, ამიტომ,

$$I_n^{\alpha_n}(f^*)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(-1)^{k+1}f_k(t)Q_n^{\alpha_n}(t)dt+O\left(\Gamma(1+\alpha_n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(-1)^{k+1}f_k(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\alpha_n\pi/2\right]\left(2\sin\frac{k+1+\alpha_n/2}{2n+1+\alpha_n}\pi\right)^{-1-\alpha_n}dt+$$

$$+O\left(\Gamma(1+\alpha_n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\left(2\sin\frac{k+1+\dfrac{\alpha_n}{2}}{2n+1+\alpha_n}\right)^{-1-\alpha_n}\pi\int_{t_k}^{t_{k+1}} f_k(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n\pi}{2}\right]dt+$$

$$+O\left(\Gamma(1+\alpha_n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right).$$

რადგან $(-1)^{k+1} f_k(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]$ არაუარყოფითია, ამიტომ

$$\left|I_n^{\alpha_n}\left(f^*\right)\right|=\frac{2}{\pi A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{k+1+\alpha_n/2}{2n+1+\alpha_n}\pi\right)^{-1-\alpha_n}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f_k(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n\pi}{2}\right]dt+$$

$$+O\left(\Gamma(1+\alpha_n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{k+1+\alpha_n/2}{2n+1+\alpha_n}\pi\right)^{-1-\alpha_n}\frac{2}{2n+1+\alpha_n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{4t}{2n+1+\alpha_n}\right)\sin(t)\,dt+$$

$$+O\left(\Gamma(1+\alpha_n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right)=$$

$$=\frac{4}{(2n+1+\alpha_n)\pi A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{k+1+\dfrac{\alpha_n}{2}}{2n+1+\alpha_n}\pi\right)^{-1-\alpha_n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{4t}{2n+1+\alpha_n}\right)\sin t\,dt+$$

$$+O\left(\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt+\Gamma(1+\alpha_n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

ამრიგად, $f^*(x)$ ფუნქციისათვის რომელიც ეკუთვნის $H$ კლასს, $\left|I_n^{\alpha_n}\left(f^*\right)\right|$-ის მნიშნელობა ზუსტად ემთხვევა თეორემაში არსებულ უტოლობის მარჯვენა მხარეს, ამით თეორემა სრულად არის დამტკიცებული.

*თეორემა 3.2-ის დამტკიცება.* დავუშვათ $H_n$ არის ისეთი $\varphi$ ფუნქციების სიმრავლე $H$-დან, რომელთათვისაც სრულდება პირობა:

(4.1) $$\varphi\left(t+\upsilon\frac{(2+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}\right)=(-1)^{\upsilon}\varphi(t),\ t\in\left[\frac{(\alpha_n+1)\pi}{2n+1+\alpha_n},\frac{(3+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}\right].$$

$$\upsilon=1,\dots,n-1.$$

ვაჩვენოთ, რომ

(4.2) $$\sup_{f\in H}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)Q_n^{\alpha_n}(t)\,dt\right|=$$

$$=\sup_{f\in H_n}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)Q_n^{\alpha_n}(t)\,dt\right|,$$

ვთქვათ, $f\in H$ და $k_0$ ავარჩიოთ პირობიდან

$$\max_{k=0,\dots,n-1}\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}f(t)\mathrm{in}\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt\right|=$$

$$=\left|\int_{t_{k_0}}^{t_{k_0+1}}f(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt\right|\overset{def}{=}M_{\alpha_n}(f).$$

მაშინ

(4.3) $$\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}f(t)Q_n^{\alpha_n}(t)\,dt\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi A_n^{\alpha_n}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{k+1/2+\alpha_n/2}{2n+1+\alpha_n}\right)^{-1-\alpha_n}\int_{t_k}^{t_{k+1}}f(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt\right|\le$$

$$\le\frac{2M_{\alpha_n}(f)}{\pi A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{k+1/2+\alpha_n/2}{2n+1+\alpha_n}\right)^{-1-\alpha_n}.$$

**(4.2)**-ის დასამტკიცებლად ავაგოთ ისეთი $\varphi_0(t)=\varphi_0(f;t)\in H_n$ ფუნქცია, რომლისთვისაც **(4.3)** თანაფარდობის უკანასკნელი უტოლობის მაგივრად მართებული იქნება ტოლობა. ამისათვის განსაზღვროთ $\varphi_1$ და $\varphi_2$ ფუნქციები შემდეგნაირად:

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{2}\left[f(t)-f\left(2x_{k_0+1}-t\right)\right],\ t\in\left[t_{k_0},t_{k_0+1}\right],$$

$$\varphi_2(t)=\begin{cases}\varphi_1(t),t\in\left[t_{k_0},t_{k_0+1}\right],\\ \varphi_1\left(2t_{k_0+1}-t\right),t\in\left[t_{k_0+1},t_{k_0+2}\right].\end{cases}$$

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi_3$ არის $\varphi_2$-ის გაგრძელება პერიოდით $\frac{(4+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}$. შემდეგ, განვიხილოთ $[-\pi,\pi]$ შუალედზე $\varphi_4$ ლუწი ფუნქცია, რომელიც $[0,\pi]$ შუალედზე ემთხვევა $\varphi_3$-ს. ბოლოს, $\varphi_0$-ით აღვნიშნოთ $2\pi$-პერიოდული ფუნქცია, რომელიც $t\in[-\pi,\pi]$-ზე ემთხვევა $\varphi_4$-ს.

შევნიშნოთ, რომ:

$$\varphi_0\left(t_{k_0}\right)=\varphi_1\left(t_{k_0}\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(t_{k_0}\right)-f\left(t_{k_0+1}\right)\right],$$

$$\varphi_0\left(x_{k_0+1}\right)=\varphi_1\left(x_{k_0+1}\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(x_{k_0+1}\right)-f\left(2x_{k_0+1}-x_{k_0+1}\right)\right]=0,$$

$$\varphi_0\left(t_{k_0+1}\right)=\varphi_1\left(t_{k_0+1}\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(t_{k_0+1}\right)-f\left(t_{k_0}\right)\right]=-\varphi_1\left(t_{k_0}\right),$$

$$\varphi_0\left(x_{k_0+2}\right)=\varphi_1\left(2t_{k_0+1}-x_{k_0+2}\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(2t_{k_0+1}-x_{k_0+2}\right)-f\left(2x_{k_0+1}-2t_{k_0+1}+x_{k_0+2}\right)\right].$$

მაგრამ

$$2t_{k_0+1}-x_{k_0+2}=2\frac{(2k_0+3+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}-\frac{(2k_0+4+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}=\frac{(2k_0+2+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n},$$

$$2x_{k_0+1}-2t_{k_0+1}+x_{k_0+2}=2\frac{(2k_0+2+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}-2\frac{(2k_0+3+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}+\frac{(2k_0+4+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}=$$

$$=\frac{\left(2k_0+\alpha_n+2\right)\pi}{2n+1+\alpha_n}.$$

ამიტომ

$$\varphi_0\left(x_{k_0+2}\right)=0.$$

რადგან $\varphi_0\left(t_{k_0+2}\right)=\varphi_1\left(2t_{k_0+1}-t_{k_0+2}\right)$ და

$$2t_{k_0+1}-t_{k_0+2}=2\frac{\left(2k_0+\alpha_n+3\right)\pi}{2n+1+\alpha_n}-\frac{\left(2k_0+\alpha_n+5\right)\pi}{2n+1+\alpha_n}=\frac{\left(2k_0+\alpha_n+1\right)\pi}{2n+1+\alpha_n}=t_{k_0},$$

ამიტომ

$$\varphi_0\left(t_{k_0+2}\right)=\varphi_0\left(t_{k_0}\right).$$

ახლა ზემოთ თქმულის საფუძველზე ადვილად დავასკვნით, რომ $\varphi_0$ აკმაყოფილებს **(4.1)** პირობას და $\varphi_0\left(0\right)=0$. შევნიშნოთ, რომ $\varphi_0\in H$. უკანასკნელის საჩვენებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\varphi_1\in H\left[t_{k_0},t_{k_0+1}\right]$, რაც მარტივად მოწმდება.

ამრიგად, $\varphi_0\in H_n$. რადგან აგების თანახმად $\varphi_3$ არის $\frac{\left(4+\alpha_n\right)\pi}{2n+1+\alpha_n}$ - პერიოდული და იგივე პერიოდი აქვს $\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]$ ფუნქციას, ამიტომ $\varphi_0\left(t\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]$ ნამრავლი $\left[\frac{\left(\alpha_n+1\right)\pi}{2n+1},\pi\right]$ შუალედზე ინარჩუნებს ნიშნს. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $t_{k+1}-t_k=\frac{2\pi}{2n+1+\alpha_n}$, ადვილად დავასკვნით, რომ $\varphi_0\left(t\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]$ ფუნქციის უმცირესი პერიოდია $\frac{2\pi}{2n+1+\alpha_n}$. ეს ნიშნავს, რომ $\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi_0\left(t\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt$ ინტეგრალის მნიშნელობა არ არის დამოკიდებული $k$-ზე, მაშასადამე, ნებისმიერი $k=1,\ldots,n-1$-თვის

$$\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi_0(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt\right| =$$

$$=\left|\int_{t_{k_0}}^{t_{k_0+1}} \frac{1}{2}\left[f(t)-f\left(2x_{k_0+1}-t\right)\right]\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt\right| =$$

$$=\left|\int_{t_{k_0}}^{t_{k_0+1}} \frac{1}{2} f(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]-\int_{t_{k_0}}^{t_{k_0+1}} \frac{1}{2} f\left(2x_{k_0+1}-t\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]\right|dt .$$

განვიხილოთ

$$-\int_{t_{k_0}}^{t_{k_0+1}} \frac{1}{2} f\left(2x_{k_0+1}-t\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_{k_0+1}}^{t_{k_0}} f(x)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)\left(t_{k_0}+t_{k_0+1}-x\right)-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_{k_0+1}}^{t_{k_0}} f(x)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)\left(\frac{2\pi\left(2k_0+\alpha_n+2\right)}{2n+1+\alpha_n}-x\right)-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_{k_0+1}}^{t_{k_0}} f(x)\sin\left[\frac{\alpha_n}{2}\pi-\frac{2k_0+\alpha_n+2}{2}x\right]dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_{k_0}}^{t_{k_0+1}} f(x)\sin\left[\frac{2k_0+\alpha_n+2}{2}x-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dx .$$

ამრიგად,

$$\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi_0(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt\right| = \left|\int_{t_{k_0}}^{t_{k_0+1}} f(t)\sin\left[\frac{\alpha_n}{2}\pi\frac{2k_0+\alpha_n+2}{2}x-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt\right| .$$

მაშასადამე **(4.3)** გამოსახულებაში მიიღწევა ტოლობა, რაც ნიშნავს **(4.1)**-ის სამართლიანობას. მაგრამ

**(4.4)** $$\sup_{f\in H_n}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)Q_n^{\alpha_n}dt\right| =$$

$$=\sup_{f\in H_n}\frac{1}{\pi A_n^{\alpha_n}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{k+1/2+\alpha_n/2}{2n+1+\alpha_n}\right)^{-1-\alpha_n}\int\limits_{\frac{(\alpha_n+1)\pi}{2n+1+\alpha_n}}^{\frac{(3+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}} f(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt\right| =$$

$$=\frac{1}{\pi A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{k+1/2+\alpha_n/2}{2n+1+\alpha_n}\right)^{-1-\alpha_n}\sup_{f\in H_n}\left|\int\limits_{\frac{(\alpha_n+1)\pi}{2n+1+\alpha_n}}^{\frac{(3+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}} f(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt\right|.$$

ვინაიდან $H_n\subset H_\omega$, ამიტომ

**(4.5)** $$c_n(\omega)\overset{def}{=}\sup_{f\in H_n}\left|\int\limits_{\frac{(\alpha_n+1)\pi}{2n+1+\alpha_n}}^{\frac{(3+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}} f(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt\right|\le$$

$$\le\sup_{f\in H_\omega}\left|\int\limits_{\frac{(\alpha_n+1)\pi}{2n+1+\alpha_n}}^{\frac{(3+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}} f(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt\right|.$$

მეორე მხრივ, თუ მოვიქცევით ისე როგორც $\varphi_0(t)$-ს აგებისას, ნებისმიერი $f\in H_\omega$-სათვის $H_n$ კლასში შეიძლება მოიძებნოს ისეთი $\varphi(f;t)$ ფუნქცია, რომ:

$$\left|\int\limits_{\frac{(\alpha_n+1)\pi}{2n+1+\alpha_n}}^{\frac{(3+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}} f(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt\right|=\int\limits_{\frac{(\alpha_n+1)\pi}{2n+1+\alpha_n}}^{\frac{(3+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}} \varphi(f;t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt.$$

ამ ტოლობის და **(4.5)**-ის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\sup_{f\in H_\omega}\left|\int\limits_{\frac{(\alpha_n+1)\pi}{2n+1+\alpha_n}}^{\frac{(3+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}} f(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha_n}{2}\right)t-\frac{\alpha_n}{2}\pi\right]dt\right| =$$

$$= \sup_{f\in H_\omega}\left|\int_{\frac{-\pi}{2n+1+\alpha_n}}^{\frac{\pi}{2n+1+\alpha_n}} f\left(t+\frac{(2+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}\right)\sin\left[\frac{2n+1+\alpha_n}{2}\left(t+\frac{(2+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}\right)-\frac{\alpha_n\pi}{2}\right]dt\right| =$$

$$= \sup_{f\in H_\omega}\left|\int_{\frac{-\pi}{2n+1+\alpha_n}}^{\frac{\pi}{2n+1+\alpha_n}} f\left(t+\frac{(2+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}\right)\sin\left[\frac{2n+1+\alpha_n}{2}t+\frac{(2+\alpha_n)\pi}{2}-\frac{\alpha_n\pi}{2}\right]dt\right| =$$

$$= \sup_{f\in H_\omega}\left|\int_{\frac{-\pi}{2n+1+\alpha_n}}^{\frac{\pi}{2n+1+\alpha_n}} f\left(t+\frac{(2+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}\right)\sin\left[\frac{2n+1+\alpha_n}{2}t+\pi\right]dt\right| =$$

$$= \sup_{f\in H_\omega}\left|\int_{\frac{-\pi}{2n+1+\alpha_n}}^{\frac{\pi}{2n+1+\alpha_n}} f\left(t+\frac{(2+\alpha_n)\pi}{2n+1+\alpha_n}\right)\sin\left[\frac{2n+1+\alpha_n}{2}t\right]dt\right| =$$

$$= \sup_{f\in H_\omega}\left|\int_{\frac{-\pi}{2n+1+\alpha_n}}^{\frac{\pi}{2n+1+\alpha_n}} f(t)\sin\left[\frac{2n+1+\alpha_n}{2}t\right]dt\right| =$$

$$= \sup_{f\in H_\omega\left[\frac{-\pi}{2n+1+\alpha_n},\frac{\pi}{2n+1+\alpha_n}\right]}\left|\frac{2}{2n+1+\alpha_n}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{2t}{2n+1+\alpha_n}\right)\sin t dt\right|.$$

ე.ი.

$$c_n(\omega)=\frac{2}{2n+1+\alpha_n}\sup_{f\in H_\omega\left[\frac{-\pi}{2n+1+\alpha_n},\frac{\pi}{2n+1+\alpha_n}\right]}\left|\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{2t}{2n+1+\alpha_n}\right)\sin t dt\right| \overset{def}{=} \frac{2}{2n+1+\alpha_n}R_n(\omega).$$

ამრიგად, **(4.4)**-დან მივიღებთ:

$$\sup_{f\in H}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)Q_n^{\alpha_n}dt\right| =$$

$$=\frac{4R_n(\omega)}{\pi(2n+1+\alpha_n)}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{k+1/2+\alpha_n/2}{2n+1+\alpha_n}\right)^{-1-\alpha_n}.$$

ზემოთ თქმულის გათვალისწინებით, საბოლოოდ დავასკვნით:

$$\varepsilon_n\left(H^{\omega};\sigma_n^{\alpha_n}\right)=\frac{4R_n(\omega)}{\pi\left(2n+1+\alpha_n\right)A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{k+1/2+\alpha_n/2}{2n+1+\alpha_n}\right)^{-1-\alpha_n}+$$

$$+O\left(\Gamma\left(1+\alpha_n\right)\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right)\right).$$

**თეორემა 3.3- დამტკიცება.** შევნიშნოთ, რომ $f\in H_{\omega}\left[-\frac{\pi}{2n+1+\alpha_n},\frac{\pi}{2n+1+\alpha_n}\right]$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f\left(\frac{t}{2n+1+\alpha_n}\right)\in H_{\omega'}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, სადაც $\omega'(t)=\omega\left(\frac{2t}{2n+1+\alpha_n}\right)$. შედეგი **2.1**-ის ძალით $R_n(\omega)$ გამოსახულებისთვის მიიღება შეფასება:

$$R_n(\omega)=\sup_{f\in H_{\omega}\left[\frac{-\pi}{2n+1+\alpha_n},\frac{\pi}{2n+1+\alpha_n}\right]}\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{2t}{2n+1+\alpha_n}\right)\sin t dt\right|\le$$

$$\le\sup_{f\in H_{\omega}\left[\frac{-\pi}{2n+1+\alpha_n},\frac{\pi}{2n+1+\alpha_n}\right]}\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{4t}{2n+1+\alpha_n}\right)\sin t dt\right|,$$

რომელიც მიიღწევა

$$f_*(t)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\omega'\left(2|t|\right),\text{ თუ } t<0,\\ \frac{1}{2}\omega'(2t),\text{ თუ } t\ge 0.\end{cases}$$

ფუნქციისათვის, იმ შემთხვევაში, როცა $\omega'(t)$ არის ამოზნექილი ფუნქცია. თუ $\omega'(t)$ ნებისმიერი უწყვეტობის მოდულია, მაშინ $f_*(t)$ შეიძლება არ ეკუთნოდეს $H_{\omega'}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, მაგრამ $\varphi_*(t)=\frac{2}{3}f_*(t)\in\ H_{\omega'}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ კლასის ფუნქციაა. მართლაც, ვთქვათ $x$ და $x'$ ორივე

მდებარეობს $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\overset{def}{=}[a,c]$ ან $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\overset{def}{=}[c,b]$ ინტერვალზე, მაშინ $\left|f(x)-f(x')\right|\le\omega'\left(|x-x'|\right)$ უტოლობას უზრუნველყოფს $\omega'(t)$ ფუნქციის ნახევრადადიციურობა. ვთქვათ, $x'\in[a,c]$ და $x\in[c,b]$, მაშინ $f_*(t)$ ფუნქციის მონოტონურობის ძალით მივიღებთ

$$\left|\varphi_*(x)-\varphi_*(x')\right|=\frac{2}{3}\left|f_*(x)-f_*(x')\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\omega'\left(2(x-c)\right)+\omega'\left(2(c-x')\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\omega\left(2(x-c)\right)+\frac{1}{3}\omega\left(2\left((x-x'')+(c-x)\right)\right).$$

თუ $x-c\le x-x'\le 2(x-c)$, მაშინ

$$\frac{1}{3}\omega'\left(2(x-c)\right)+\frac{1}{3}\omega'\left(2\left((x-x')+(c-x)\right)\right)\le$$

$$\le\frac{1}{3}\omega'\left(2(x-x')\right)+\frac{1}{3}\omega'\left(2\left((x-x')+\frac{x'-x}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\omega'\left(2(x-x')\right)+\frac{1}{3}\omega'\left(2(x-x')+x'-x\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\omega'\left(2(x-x')\right)+\frac{1}{3}\omega'(x-x')\le$$

$$\le\omega'(x-x').$$

თუ $x-x'\ge 2(x-c)$, მაშინ

$$\frac{1}{3}\omega'\left(2(x-c)\right)+\frac{1}{3}\omega'\left(2\left((x-x')+(c-x)\right)\right)\le$$

$$\le\frac{1}{3}\omega'(x-x')+\frac{1}{3}\omega'\left(2(x-x')\right)\le$$

$$\le\omega'(x-x').$$

ამრიგად, $\varphi_*(t)\in H_{\omega'}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. მაშასადამე,

$$s_n(\omega)\geq\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_*(t)\sin tdt=$$

$$=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\frac{1}{2}\omega\left(\left|\frac{4t}{2n+1}\right|\right)\sin tdt+\frac{2}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\omega\left(\frac{4t}{2n+1}\right)\sin tdt=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{4t}{2n+1}\right)\sin tdt+\frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{4t}{2n+1}\right)\sin tdt=$$

$$=\frac{2}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{4t}{2n+1+\alpha_n}\right)\sin tdt\,.$$

თუ შევაჯამებთ, ჩატარებულ მსჯელობას, დავასკვნით, რომ

$$\varepsilon_n\left(H^{\omega};\sigma_n^{\alpha_n}\right)=\Theta_{\omega}\frac{4}{\pi\left(2n+1+\alpha_n\right)A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{k+1/2+\alpha_n/2}{2n+1+\alpha_n}\right)^{-1-\alpha_n}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{4t}{2n+1+\alpha_n}\right)\sin tdt+$$

$$+O\left(\Gamma\left(1+\alpha_n\right)\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{|\alpha_n|}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right)\right),\ n\to\infty,$$

$$\frac{2}{3}\leq\Theta_{\omega}\leq 1,$$

ამასთან $\Theta_{\omega}=1$, თუ $\omega(t)$ არის ამოზნექილი ფუნქცია.

# დ ა ს კ ვ ნ ა

უწყვეტ ფუნქციათა სივრცეში განხულია $H_{\omega}$ კლასის ფუნქციები, რომლებისთვისაც შეფასებულია ფურიეს კერძო ჯამების ჩეზაროს განზოგადოებული საშუალოების გადახრა შესაბამისი ფუნქციებიდან უწყვეტ ფუნქციათა სივრცეში.

# ლიტერატურა

[1] Lebesgue H., Sur les intégrales singulieres, Ann. De Toulouse, 1 (1909), 25-117.

[2] Über die Genauigkeit der Annäheurung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen: Diss.- Cöttingen, (1911).

[3] On approximation by trigonometric sums and polynomials.-Trans. Amer. Math. Soc., 14, (1912), 491-515.

[4] Zur Grössenordnung des Restliedes Fourierschen Reihen differenzierbaren Functionen.- Ann. Math., 36 (1935), 521-526.

[5] Никольский С.М. Об асиптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера.- Изв. АН СССР. Сер. Математика, 4, № 6, (1940), 501-508.

[6] Никольский С.М. О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами.- Изв. АН СССР. Сер. Математика, 4, № 6, (1940), 509-520.

[7] Никольский С.М. Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье.- Докл. АН СССР, 22, № 6, (1941), 386-389.

[8] Никольский С.М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами.- Тр. Мат. Ин-та АН СССР, 15, (1945), 1-76.

[9] Никольский С.М. О линейных методах суммирования рядов Фурье.- Изв. АН СССР. Сер. Математика, 12, (1948), 191-193.

[10] Никольский С.М. Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывности.- Докл. АН СССР. 52, (1946), 191-193.

[11] Никольский С.М. О линейных методах суммирования рядов Фурье.- Изв. АН СССР. Сер. Математика, 12, (1948), 259-278.

[12] Корнейчук М.П. Об оценке приближений класса $H^{\alpha}$ тригонометрическими многочленами.- В кн.: Исследование по современным проблемам конструктивной теории функций. М. : Физматгиз, (1961), 148-154.

[13] Степанец, А.И.: Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.- Киев изд. „Наукова Думка“ (1981), 112-118.

[14] ახობაძე თ. $H_{\omega}$ კლასის ფუნქციების ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების ჩეზაროს საშუალოების ასიმპტოტური შეფასების შესახებ, საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე, 134, №3, (1989)

[15] Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчесления, том 2. М.: Государственное издательство технико-технической литературы, (1956)

[16] Akhobadze, T. On the convergence of generalized Cesáro means of trigonometric Fourier series. I- Acta Math. Hungar., 115 (1-2) (2007), 59-78.

[17] Zygmund , A. Trigonometric Series. volume I, Cambridge at the university press (1959).