ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მარიამ თათიკიშვილი

არსად მარტივი სიმრავლეების შესახებ

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკის დეპარტამენტი

ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკის მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, თსუ-ს სრული პროფესორი როლანდ ომანაძე

თბილისი, 2016

სარჩევი

ანოტაცია

ნაშრომი ეძღვნება არსად მარტივ სიმრავლეთა კლასის შესწავლას. აღნიშნულ სიმრავლეთა ცნება გასული საუკუნის 70-იან წლებში რ. შორმა შემოიტანა და ეს კლასი აღმოჩნდა მეტად საინტერესო თვისებების მქონე. მანვე აჩვენა, რომ ყოველი რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე შეიძლება გაიყოს ორ ურთიერთარამკვეთ არსად მარტივ სიმრავლეებად. რეკურსიულად გადათვლად ცნობილ კლასებთან შედარებით არსად მარტივ სიმრავლეთა კლასი ნაკლებად არის შესწავლილი.

ნაშრომში ერთიანი სახითაა გადმოცემული სხვადასხვა ავტორთა მიერ ამ კლასთან დაკავშირებით მიღებული მნიშვნელოვანი და საინტერესო შედეგები.

ANOTATION

The paper deals with a study of nowhere simple sets class. The concept of designated sets was introduced by R. Sore in 70-ies of last century and proved that class has very interesting properties. He sowed that every recursively enumerable sets can be split into two disjoint nowhere simple sets. Compare with another well-known recursively enumerable sets, the class of nowthere simple sets is less explored.

In this paper are given important and interesting results about that class of sets with integrated face by various authors.

შესავალი

ე. პოსტმა თავის ცნობილ სტატიაში [E. L. Post. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problem. Amer. j. math. , 65, 197-215] შემოიტანა რეკურსიული და რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეების ცნებები. მან აჩვენა, რომ არსებობს რ.გ არარეკურსიული სიმრავლე. რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა იერარქიისათვის ე. პოსტმა განსაზღვრა დაყვანადობის რამდენიმე ცნება. მათ შორის ყველაზე ზოგადია ტიურინგის აზრით დაყვანადობა (T-დაყვანადობა).

ამბობენ, რომ A სიმრავლე T -დაყვანადია B სიმრავლეზე (სიმბოლურად: $\mathrm{A} \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{B}$), თუ არსებობს ეფექტური მეთოდი, რომელიც ნებისმიერი ნატურალური y რიცხვისთვის პასუხობს კითხვას $y \in A$? იმ პირობით, რომ ნებისმიერი ნატურალური z რიცხვისთვის კითხვაზე $z \in B$? პასუხი წინასწარ ცნობილია. თუ

$$\mathrm{A} \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{B} \text{ და } \mathrm{B} \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{A},$$

მაშინ

$$\mathrm{A} \equiv_{\mathrm{T}} \mathrm{B}.$$

ე. პოსტმა განსაზღვრა ნებისმიერი A სიმრავლისთვის მისი T-ხარისხი, რომელიც აღნიშნა $\deg_{\mathrm{T}}(\mathrm{A})$, სადაც

$$\deg_{\mathrm{T}}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{B}: \mathrm{B} \equiv_{\mathrm{T}} \mathrm{A}\}.$$

პოსტმა რეკურსიულ სიმრავლეთა T-ხარისხი აღნიშნა $\mathbf{0}$-ით და მის მიერ აგებული რ.გ სიმრავლის T-ხარისხი აღნიშნა $\mathbf{0}'$-ით.

მან დასვა პრობლემა: არსებობს თუ არა რ.გ. ხარისხი $\mathbf{a}$ ისეთი, რომ $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{0}'$. ამ პრობლემის გადაწყვეტის მიზნით პოსტმა შემოიტანა მარტივ სიმრავლეთა სამი კლასი: მარტივი, ჰიპერმარტივი და ჰიპერჰიპერმარტივი. მარტივ სიმრავლეთა ეს კლასები იმდენად მნიშვნელოვანი და საინტერესო აღმოჩნდა, რომ ამ კლასების სტრუქტურულ თვისებებს დღემდე იკვლევენ, მიღებულია მრავალი მნიშვნელოვანი და საინტერესო შედეგი.

რაც შეეხება არა მარტივ სიმრავლეთა კლასს, ის ნაკლებად არის შესწავლილი და მათი შესწავლის მიზნით 1978 წელს რ. შორმა შემოიტანა არსად მარტივი სიმრავლის ცნება, რომელიც როგორც შემდგომმა კვლევება ცხადყო, არის საინტერესო და მნიშვნელოვანი ცნება რ.გ სიმრავლეთა თვისებების შესასწავლად.

მოცემული სამაგისტრო ნაშრომი ეძღვნება არსად მარტივ სიმრავლეებს.

ნაშრომში სისტემატური სახით გადმოცემულია სხვადასხვა ავტორის მიერ მიღებული მნიშვნელოვანი შედეგები არსად მარტივი სიმრავლეების შესახებ. კერძოდ, მეორე პარაგრაფში მოცემულია რ. შორის შედეგი იმის შესახებ, რომ ყოველი რ.გ. სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი ურთიერთ არამკვეთი არსად მარტივი სიმრავლეების სახით, ანუ არსად მარტივი სიმრავლეები წარმოქმნიან მთელ რ.გ. სიმრავლეთა კლასს გაერთიანების ოპერაციით. ასევე გადმოცემულია სხვა ავტორთა შედეგები ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეებზე.

მესამე პარაგრაფში მოცემულია რ. შორის ცნობილი თეორემის დამტკიცება იმის შესახებ, რომ ყოველ რ.გ. T -ხარისხში არსებობს არსად მარტივი სიმრავლე.

მეოთხე პარაგრაფში მოცემულია მაქსიმალური სიმრავლის დახასიათება არსად მარტივი სიმრავლეების ტერმინებში.

მეოთხე პარაგრაფში მოცემულია სრული დამტკიცება იმისა, რომ ყოველ რ.გ. T -ხარისხში არსებობს რ.გ. სიმრავლე, რომლის Q-ხარიხი არ შეიცავს არც მარტივ და არც არსად მარტივ სიმრავლეს.

შემოვიღოთ რამდენიმე განსაზღვრა:

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ A სიმრავლე რეკურსიულია, თუ

$$\left(\exists f \text{ ზოგადრეკურსიული ფუნქცია}\right)(\forall x)\left(x \in A \Longrightarrow f(x) = 1 \text{ და } x \notin A \Longrightarrow f(x) = 0\right).$$

უხეშად რომ ვთქვათ, ფუნქციის რეკურსიული განსაზღვრა, ეს არის განსაზღვრა, რომელშიც მოცემული არგუმენტებისათვის ფუნქციის მნიშვნელობები უშუალოდ განისაზღვრებიან იგივე ფუნქციის „უფრო მარტივი" არგუმენტების მნიშვნელობებით, ან „უფრო მარტივი" ფუნქციის მნიშვნელობებით.

განსაზღვრა. ნაწილობრივად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასი ეწოდება უმცირეს კლასს, რომელიც შეიცავს ფუნქციებს $\lambda x[m]$, $\lambda x[x+1]$, $\lambda x_1, \dots, x_k[x_i]$, $1 \leq i \leq k$ და ჩაკეტილია ჩასმის ოპერაციის მიმართ, პრიმირული რეკურსიის ოპერაციის მიმართ და მინიმიზაციის ოპერაციის მიმართ.

განსაზღვრა. ყველგან განსაზღვრულ ნაწილობრივ რეკურსიულ ფუნქციას ეწოდება ზოგადრეკურსიული ფუნქცია.

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ A არის არსად მარტივი სიმრავლე, თუ A არის რეკურსიულად გადათვლადი და ყოველი რ.გ. B სიმრავლისთვის, სადაც $B - A$ უსასრულოა, არსებობს ისეთი რ.გ, უსასრულო სიმრავლე W, რომ $W \subseteq (B - A)$.

განსაზღვრა. $W_x = \mathrm{dom}\,\varphi_x$ ($\varphi_x -$ის განსაზღვრის არე).

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ A სიმრავლე არის რეკურსიული B სიმრავლეში, თუ $C_A(x)$ არის რეკურსიული B სიმრავლეში.

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ $C_A(x)$ არის A სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია, თუ

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, \text{თუ } x \in A \\ 0, \text{თუ } x \notin A \end{cases}.$$

1. რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა წარმოდგენა არსად მარტივი სიმრავლეებით

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ A სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია (რ.გ), თუ $A = \emptyset$, ან არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f-ი, რომ A არის f-ის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

განსაზღვრა. რეკურსიულად გადათვლადი A სიმრავლის წარმოდგენას $A = B \cup C$ სახით, სადაც B და C რ.გ სიმრავლეებია და $B \cap C = \emptyset$, ეწოდება A სიმრავლის გაყოფა.

არსად მარტივი სიმრავლეების ასაგებად დადებითი და უარყოფითი მოთხოვნები გამოიყენება. დადებითი მოთხოვნების დროს, არსად მარტივი სიმრავლეების აგებისას, ვიღებთ ყველა იმ ელემენტს, რომელიც გადათვლისას გადაეცემა მოცემულ სიმრავლეებში. წინააღმდეგ შემთხვევაში ადგილი ექნება უარყოფით შემთხვევებს.

განსაზღვრა. $W \searrow B$ -ით ავღნიშნავთ ყველა იმ ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც ჯერ გამოითვლებიან W სიმრავლეში, შემდეგ კი B სიმრავლეში.

განსაზღვრა. $\omega = \{0,1,2, \dots\}$ არის დადებითი, მთელი რიცხვების სიმრავლე.

განვიხილოთ რიჩარდ შორის გაყოფის შემდეგი თეორემა:

თეორემა (შორი [7]) 1.1. ყოველი რეკურსიულად გადათვლადი C სიმრავლე შეიძლება გაიყოს ორ არსად მარტივ, A_0 და A_1 სიმრავლედ.

დამტკიცება. ვთქვათ f არის ურთიერთცალსახა რეკურსიული ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობათა არეა C სიმრავლე.

შემოვიღოთ მარტივი მოთხოვნები $P^i_{\langle e,n\rangle}$: გადავცემთ n ელემენტებს W_e სიმრავლიდან A_i სიმრავლეში ($i = 1,2$). ამ მოთხოვნებს დავალაგებთ შემდეგნაირად:

$$P^i_{\langle e,n\rangle} < P^{i'}_{\langle e',n'\rangle},$$

თუ

$$\langle e,n\rangle < \langle e',n'\rangle, \text{ ან } \langle e,n\rangle = \langle e',n'\rangle \text{ და } i < i'.$$

ცხადია, რომ $P^i_{\langle e,n\rangle}$ მოთხოვნა s ნაბიჯზე დაკმაყოფილდება, თუ იარსებებს W^s_e სიმრავლის n ელემენტები, რომლებიც შევლენ A^s_i სიმრავლეში.

კონსტრუქცია. s ნაბიჯი: $f(s)$ გადავცეთ A_0 ან A_1 სიმრავლეში, ისე რომ უმაღლესი პრიორიტეტის მქონე დაუკმაყოფილებელი მოთხოვნა შესრულდეს. (ცხადია, რომ ჩვენ

შეგვიძლია გამოვიყენოთ W_e^s იმისთვის, რომ ვნახოთ დავაკმაყოფილეთ თუ არა $P^i_{\langle e,n\rangle}$ მოთხოვნები.)

ცხადია, რომ

$$A_0 \cap A_1 = \emptyset \text{ და } A_0 \cup A_1 = C.$$

მაგალითად ვაჩვენოთ, რომ A_0 არის არსად მარტივი. განვიხილოთ ნებისმიერი W_e სიმრავლე ისეთი, რომ $(W_e - A_0)$ არის უსასრულო. თუ $W_e \cap A_1$ უსასრულოა, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $(W_e - C)$ უსასრულოა.

თუ

$$W_e \searrow C = \{x|(\exists s,t)\big(s < t \text{ და } x \in W_e^{s+1} - W_e^s \text{ და } x \in C^{t+1} - C^t\big)\},$$

სასრულია, მაშინ

$$W_e \searrow C = \{x|(\exists s)(\, x \in W_e^s - C^s)\},$$

თითქმის ტოლია $(W_e - C)$ სიმრავლის, რადგან $W_e \searrow C$ არის რეკურსიულად გადათვლადი, ამიტომ $(W_e - C)$ იქნება რეკურსიულად გადათვლადი. მივიღეთ წინააღმდეგობა. აქედან გამომდინარე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $(W_e - C)$ სიმრავლე ჩვენს მოთხოვნებს აკმაყოფილებს. ამრიგად, შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $W_e \searrow C$ სიმრავლე უსასრულოა. კონსტრუქციაში მოთხოვნების პრიორიტეტული სქემა იძლევა იმის გარანტიას, რომ $(W_e \searrow C) \cap A_i$, $(i = 0,1)$ არის უსასრულო. ამ შემთხვევაში, $(W_e - A_0)$ სიმრავლის ჩვენთვის საჭირო ქვესიმრავლე არის $((W_e \searrow C) \cap A_1)$.

ზუსტად იგივენაირად დავამტკიცებთ A_1 სიმრავლის არსად მარტივობას და შედეგად, თეორემის მიხედვით, A_0 და A_1 არსად მარტივი ქვესიმრავლეები გვექნება. ∎

ახლა ვნახოთ რაში მდგომარეობს ფრიდბერგის გაყოფის თეორემის არსი (ვ. ჰარიზანოვი [4]):

ყოველი რეკურსიულად გადათვლადი B სიმრავლე შესაძლოა გაიყოს ორ რეკურსიულად გადათვლად A_0 და A_1 სიმრავლედ ისე, რომ ყოველი რ.გ W სიმრავლისთვის:

(1) თუ $(W - A_0)$ რეკურსიულად გადათვლადია, ან $(W - A_1)$ რეკურსიულად გადათვლადია, მაშინ $(W - B)$ სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია.

ფრიდბერგის სტრატეგია B სიმრავლის ორად გაყოფის შესახებ დაფუძნებულია შემდეგ მოთხოვნაზე: რ.გ W სიმრავლისთვის:

(2) თუ $(W \searrow B)$ უსასრულოა, მაშინ $(W \cap A_0) \neq \emptyset$ და $(W \cap A_1) \neq \emptyset$.

შეგვიძლია ვთქვათ, რომ შორის სტრატეგია სიმრავლის ორად გაყოფის შესახებ დაფუძნებულია შემდეგზე: ყოველი რ.გ W სიმრავლისთვის:

(3) თუ $(W \searrow B)$ უსასრულოა, მაშინ $(W \cap A_0)$ უსასრულოა და $(W \cap A_1)$ უსასრულოა.

ეს მოთხოვნა უზრუნველყოფს A_0 და A_1 სიმრავლეების არსად მარტივობას.

ყოველი რ.გ W სიმრავლისთვის სამართლიანია, რომ:

(4) თუ $(W \cap A_0)$ სასრულია, ან $(W_e \cap A_1)$ სასრულია, მაშინ $(W - B)$ სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია.

ვთქვათ

$$W = \omega - A_i, \ (i \in \{0,1\}),$$

მაშინ (4)-დან გამომდინარეობს შემდეგი:

(5) თუ A_0 სიმრავლე რეკურსიულია, ან A_1 რეკურსიულია, მაშინ B სიმრავლე რეკურსიულია.

რადგან

$$W = (W - A_i) \cup (W - A_i), \ (i \in \{0,1\}),$$

შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (1)-დან გამომდინარეობს (4), ამ უკანასკნელიდან კი- (5).

ამგვარად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ფრიდბერგის გაყოფის თეორემაში A_0 და A_1 სიმრავლეები არსად მარტივებია.

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ ξ მესერია, თუ ნებისმიერ ორ $a, b \in \xi$ ელემენტს აქვს როგორც ზუსტი ზედა საზღვარი $(a \vee b)$, ასევე ზუსტი ქვედა საზღვარი $(a \wedge b)$.

ვთქვათ $\mathcal{E}$ არის მესერი ყველა რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეებისა.

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ A სიმრავლე მარტივია, თუ:

(1) A სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია.

(2) $\overline{A}$ სიმრავლე უსასრულოა.

(3) $(\forall x)\Big[[\text{ B სიმრავლე უსასრულოა \& B სიმრავლე რ. გ}] \Longrightarrow B \cap A \neq \emptyset\Big]$

შემოვიტანოთ ასეთი აღნიშვნები:

$C_0 =$ სიმრავლეა ყველა რეკურსიული სიმრავლეებისა,

$C_1 =$ სიმრავლეა ყველა მარტივი სიმრავლეებისა,

$C_3 = \{A \in (\mathcal{E} - C_0) \colon \exists W\big[W \text{ რ. გ და უსასრულოა, და } W \cap A = \emptyset \text{ და } W \cup A \text{ არის მარტივი}\big]\}$.

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ A არის ეფექტურად არსად მარტივი, თუ A არის რ.გ სიმრავლე და არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია f-ი, რომ

$$W_{f(i)} \subseteq W_i - A, \ \ ((\forall i \in \omega), (\omega = \{0,1,2, \dots\}))$$

და $W_{f(i)}$ უსასრულოა, თუ $W_i - A$ უსასრულოა.

წინა განმარტებიდან გამომდინარე f-ს უწოდებენ A სიმრავლის მოწმე ფუნქციას.

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ A არის არაეფექტურად არსად მარტივი, თუ ის არის არსად მარტივი და არ არის ეფექტურად არსად მარტივი.

განსაზღვრა. ვთქვათ გვაქვს რ.გ A-სიმრავლე და ვიტყვით, რომ T მოწმე სიმრავლეა A-თვის, თუ T რ.გ სიმრავლე ისეთია, რომ

$$T \cap A = \emptyset$$

და ყოველი W_i-სთვის $(W_i - A)$ უსასრულოა, მაშინ $W_i \cap T$ არის უსასრულო.

წინადადება (მილერი და რემელი [6]) 1.1. იმისთვის, რომ A სიმრავლე იყოს ეფექტურად არსად მარტივი აუცილებელია და საკმარისია, რომ მას ქონდეს მოწმე სიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ A ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეა და მისი მოწმე ფუნქციაა f -ი. თუ

$$T \coloneqq \bigcup_i W_{f(i)},$$

მაშინ T არის მოწმე A სიმრავლისთვის.

სხვა შემთხვევაში, თუ T არის მოწმე A სიმრავლის, შეგვიძლია განვსაზღვროთ f რეკურსიული ფუნქცია ისე, რომ:

$$W_{f(i)} = T \cap W_i\ .$$

ცხადია f არის მოწმე A სიმრავლისთვის და აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ A არის ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლე. ■

თეორემა (ჰარიზანოვი [5]) 1.2. ყოველი რ.გ A სიმრავლისთვის, შემდეგი წინადადებები ერთმანეთის ექვივალენტურია:

(1) A სიმრავლე იყოფა ორ ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლედ.

(2) $A \in C_0$ ან $\exists W[W$ რ. გ და $W \cap A = \emptyset$ და $W \cup A$ არის მარტივი$]$

(3) $A \in C_0 \cup C_1 \cup C_2$.

(4) A სიმრავლის ყოველი გაყოფა ორ არსად მარტივ სიმრავლედ წარმოადგენს ეფექტურად არსად მარტივ ქვესიმრავლეებს.

დამტკიცება. (1)⟹(2): ვთქვათ, რომ $A = A_0 \cup A_1$, სადაც $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ და A_0 და A_1 არიან ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეები.

დავუშვათ T_i წარმოადგენდეს A_i $(i = 0,1)$ სიმრავლის მოწმე სიმრავლეს და

$$W \coloneqq T_0 \cap T_1 .$$

ცხადია, რომ

$$A \cap W = \emptyset \text{ და } A_i \cap T_i = \emptyset, \ (i = 0,1).$$

ვთქვათ $S \coloneqq A \cup W$, თუ S არის კოსასრული (ანუ მისი დამატება, $\overline{S}$ სასრული სიმრავლეა), მაშინ $\overline{A} =^* W$, რადგან W არის მოწმე სიმრავლეების თანაკვეთა, რომლებიც რ.გ სიმრავლეებია, ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ A სიმრავლე რეკურსიულია.

ახლა ვთქვათ, რომ S არის კოუსასრულო. ვაჩვენოთ, რომ S მარტივია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, S არის კოსასრული, მაშინ იარსებებს U უსასრულო, რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთი, რომ

$$U \cap S = \emptyset,$$

მაშინ

$$U \cap A_0 = \emptyset$$

და ცხადია $U \cap T_0$ უსასრულოა. თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$(U \cap T_0) \cap A_1 = \emptyset,$$

მაშინ

$$(U \cap T_0) \cap T_1 = U \cap \overline{S}$$

იქნება უსასრულო, მივიღეთ წინააღმდეგობა, ანუ S არის კოსასრული და ასეთი U სიმრავლის არსებობა ადასტურებს, რომ S მარტივია.

(2) $\Longrightarrow$(4): ვთქვათ სრულდება (2) წინადადება.

დავუშვათ, რომ A გაყოფილია B_0, B_1 არსად მარტივ სიმრავლეებად. ვაჩვენოთ, რომ B_0 ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეა. თუ B_0 რეკურსიულია და გავითვალისწინებთ მის არსად მარტივობასაც, მაშინ B_0 ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლე იქნება. დავუშვათ საწინააღმდეეგო, B_0 არ არის რეკურსიული, მაშინ A არ არის რეკურსიული.

ვთქვათ W არის A სიმრავლის შესაბამისი რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე. თუ

$$A \cup W = B_0 \cup (B_1 \cup W)$$

და

$$B_0 \cap (B_1 \cup W) = \emptyset,$$

აქედან გამომდინარე $B_0 \cup (B_1 \cup W)$ მარტივია. მარტივი სიმრავლის განმარტების თანახმად არსებობს ისეთი უსასრულო, რ.გ R სიმრავლე, რომ

$$R \cap (B_0 \cup (B_1 \cup W)) \neq \emptyset.$$

რადგან

$$R \cap (B_1 \cup W) \neq \emptyset,$$

და გავითვალისწინებთ იმას, რომ „$R \cap (B_1 \cup W)$ არის უსასრულო“ შესაძლოა შიცვალოს „$R \cap (B_1 \cup W) \neq \emptyset$“ -ით, მაშინ $(B_1 \cup W)$ არის მოწმე B_0 სიმრავლის და ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლის აუცილებელი და საკმარისი პირობის გათვალისწინებით B_0 იქნება ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლე. ანალოგიურია B_1 სიმრავლის შემთხვევაც.

(2) ⟺(3) და (4) ⟹(1) ექვივალენტობების სამართლიანობა ცხადია შესაბამისი განმარტებებიდან გამომდინარე. ■

წინდადება (მილერი & რემელი [6]) 1.2. ვთქვათ A არსად მარტივი სიმრავლე ისეთია, რომ A გაყოფილია ორ ეფექტურად არსად მარტივ A_1 და A_2 სიმრავლეებად, მაშინ A წარმოადგენს ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეს.

დამტკიცება. ვთქვათ A სიმრავლე გაყოფილია ორ, A_1 და A_2 ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეებად, შესაბამისი მოწმე T_1 და T_2 სიმრავლეებით.

ვაჩვენოთ რომ, თუ A არსად მარტივი სიმრავლეა, მაშინ $(T_1 \cap T_2)$ არის მოწმე სიმრავლე A სიმრავლისთვის. ცხადია $T_1 \cap T_2$ არის რ.გ და

$$T_1 \cap T_2 \cap A = \emptyset.$$

დავუშვათ $(W_e - A)$ უსასრულოა. რადგანაც A არის არსად მარტივი სიმრავლე, მაშინ იარსებებს R_e უსასრულო რეკურსიული სიმრავლე ისეთი, რომ $R_e \subseteq (W_e - A)$. მაგრამ, თუ

$$R_e \cap A_1 = \emptyset$$

და რადგან T_1 არის მოწმე A_1-სიმრავლის, მაშინ $R_e \cap T_1$ უსასრულოა. მაგრამ, თუ $R_e \cap T_1$ არის უსასრულო რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთი, რომ

$$R_e \cap T_1 \cap A_2 = \emptyset$$

და რადგანაც T_2 არის მოწმე A_2 სიმრავლის, მაშინ $R_e \cap T_1 \cap T_2$ უსასრულოა. საბოლოოდ მივიღეთ, რომ $W_e \cap (T_1 \cap T_2)$ არის უსასრულო. მოწმე სიმრავლის განსაზღვრის თანახმად, $(T_1 \cap T_2)$ გამოდის მოწმე A სიმრავლის, რაც წარმოადგენს A სიმრავლის ეფექტურად არსად მარტივობის აუცილებელ და საკმარის პირობას. ■

წინდადება (მილერი & რემელი [6]) 1.3. თუ A არის ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლე და წარმოდგება ორი, A_1 და A_2 რ.გ სიმრავლეების გაერთიანების სახით, მაშინ ეს ქვესიმრავლეებიც ეფექტურად არსად მარტივებია.

დამტკიცება. ვთქვათ T არის მოწმე A სიმრავლისთვის, მაშინ $(T \cup A_1)$ და $(T \cup A_2)$ არიან მოწმეები შესაბამისად, A_2 და A_1 სიმრავლეებისთვის. ■

2. არსად მარტივი სიმრავლეები რეკურსიულად გადათვლად T-ხარისხში

განსაზღვრება. ვიტყვით, რომ A სიმრავლე არის T (ტიურინგით) დაყვანადი B სიმრავლეზე (სიმბოლურად: $A \leq_T B$), თუ არსებობს ეფექტური ალგორითმი, რომელიც ნებისმიერი z -სთვის იძლევა პასუხს კითხვაზე $z \in A$? იმ პირობით, რომ ანალოგიურ კითხვაზე B სიმრავლისთვის პასუხი გვაქვს.

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ A სიმრავლე T-ექვივალენტურია B სიმრავლის (სიმბოლურად: $A \equiv_T B$), თუ

$$A \leq_T B \text{ და } B \leq_T A.$$

A სიმრავლის T -ხარისხი აღინიშნება $\deg_T(A)$-ით და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\deg_T(A) = \{B: B \equiv_T A\}.$$

განსაზღვრა. $A =^* B$ აღნიშნავს, რომ $(A - B) \cup (B - A)$ არის სასრული.

თეორემა (შორი [7]) 2.1. თუ **a** არის რეკურსიულად გადათვლადი T-ხარისხი, მაშინ არსებობს A არსად მარტივი სიმრავლე ისეთი, რომ $A \in \mathbf{a}$.

დამტკიცება. ვთქვათ C არის **a**-დან აღებული რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე.

დავუშვათ

$$B = C \times N = \{\langle x, i\rangle | x \in C, \forall i \in N\}$$

და f არის ურთიერთცალსახა რეკურსიული ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლეა B. ცხადია, რომ $B \equiv_T C$. ავაგოთ B სიმრავლის, ისეთი მჭიდრო A ქვესიმრავლე, რომ

$$A^{(n)} = \{x | \langle n, x\rangle \in A\} =^* B^{(n)}.$$

უარყოფითი მოთხოვნებია ($N_{\langle e,n\rangle}$): თუ $W_e^{(n)} \neq \emptyset$, მაშინ

$$W_e^{(n)} - A^{(n)} \neq \emptyset, \forall (e < n).$$

კონსტრუქცია. s ნაბიჯი: ვაჩვენოთ, არსებობს თუ არა $\langle n, i\rangle \in W_e^s$, $\forall (e < n)$ ისეთი, რომ რაიმე $\langle n, j\rangle$ ელემენტს არ ექნება e აღნიშვნა. გადავცეთ ასეთი აღნიშვნა. ახლა f(s) გადავცეთ A სიმრავლეში, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას ექნება ეს e აღნიშვნა.

თუ $x \in A$, მაშინ $x = f(s) \in B$ და f(s) გადავცეთ A სიმრავლეში s ნაბიჯზე, აქედან გამომდინარე, გვექნება

$$A \leq_T B \leq_T C.$$

სხვა შემთხვევაში e აღნიშვნიანი $B^{(n)}$ სიმრავლის ელემენტები დარჩებიან A სიმრავლის გარეთ, სადაც $e < n$. ასე რომ

$$A^{(n)} =^* B^{(n)}$$

და $n \in C$ (თუ $\langle n, i\rangle \in B$, $\forall i$-თვის), თუ $\langle n, 0\rangle, \langle n, 1\rangle, \ldots\ldots\ldots, \langle n, n+1\rangle$ ელემენტებიდან ერთი მაინც შევა A სიმრავლეში. აქედან გამომდინარე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ

$$C \leq_T A$$

და

$$A \in \mathbf{a}.$$

ვაჩვენოთ, რომ A არის არსად მარტივი. განვიხილოთ რაიმე W_e სიმრავლე, ისეთი რომ $(W_e - A)$ უსასრულოა. თუ რაიმე n-თვის $(W_e - A)^{(n)}$ უსასრულოა, მაშინ $B^{(n)}$ და $A^{(n)}$ ცარიელი სიმრავლეებია და $W_e^{(n)}$ არის სასურველი რ.გ. ქვესიმრავლე $(W_e - A)$ სიმრავლის. სხვა შემთხვევაში უსასრულოდ დიდი n -თვის

$$(W_e - A)^{(n)} \neq \emptyset.$$

ამიტომ უსასრულო დიდი n -თვის $\langle n, i\rangle$ ელემენტებს მივანიჭებთ e აღნიშვნას, ასე რომ არ არსებობს რაიმე ნომერი აღნიშვნით, რომელსაც ოდესმე გადავცემთ A სიმრავლეში. ხოლო, ასეთი ელემენტებისგან შემდგარი სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადი ქვესიმრავლეა $(W_e - A)$ სიმრავლის, რომელიც აკმაყოფილებს მოთხოვნებს. საბოლოოდ A არსად მარტივი სიმრავლის ასაგებად, ჩვენი მოთხოვნები დაკმაყოფილებულია. ∎

განსაზღვრა. შემოვიტანოთ (A join B)-ოპერაციის განმარტება,

$$A \oplus B = \{y \mid [y = 2x \ \& \ x \in A] \cup [y = 2x + 1 \ \& \ x \in B]\}.$$

განვიხილოთ თეორემა 2.1-ის სხვა დამტკიცება:

ვთქვათ A რეკურსიულად გადათვლადი სიმრვლე აღებულია **a** რეკურსიულად გადათვლადი T ხარისხიდან და გაყოფილია ორ A_0 და A_1, არსად მარტივ სიმრავლეებად.

ვაჩვენოთ, რომ

$$A_0 \oplus A_1 \leq_T A$$

და

$$A \leq_T (A_0 \oplus A_1).$$

დავუშვათ, რომ

$$A_0 \leq_T A \ \& \ A_1 \leq_T A;$$

რადგან $A_0 \oplus A_1$ არის A_0 და A_1 ქვესიმრავლეების უმცირესი ზედა საზღვარი (ნებისმიერი ორი ელემენტისთვის, სადაც $a \in A_0$ და $b \in A_1$, სამართლიანია, რომ $a \vee b \in A_0 \oplus A_1$), ამიტომ

$$A_0 \oplus A_1 \leq_T A \ .$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ სრულდება პირიქით $A \leq_T A_0 \oplus A_1$. არსებობს ისეთი რეკურსიული f ფუნქცია, რომ ყოველი $x \in A$-თვის

$$D_{f(x)} = \{2x, 2x+1\},$$

მაშინ

$$x \in A \Leftrightarrow D_{f(x)} \cap (A_0 \oplus A_1) \neq \emptyset,$$

აქედან გამომდინარე

$$A \leq_T (A_0 \oplus A_1). \quad \blacksquare$$

თეორემა (მილერი და რემელი [6]) 2.2. ყოველ რეკურსიულად გადათვლად $\boldsymbol{\delta}$ (ტიურინგის) ხარისხში არსებობს ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეები.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\boldsymbol{\delta}$ არის არანულოვანი რეკურსიულად გადათვლადი ხარისხი. ვთქვათ C არის $\boldsymbol{\delta}$ ხარისხის რ.გ სიმრავლე, g არის ურთიერთცალსახა რეკურსიული ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლე არის C და $\{D_e\}_{e \in \omega}$ არის N სიმრავლის (ნატურალური რიცხვების) ეფექტური დანაწილება ისეთი, რომ

$$|D_e| = e + 2, \ \ (\forall e = 0,1,2, \dots),$$

ანუ

$$N = \bigcup_e D_e$$

და რაიმე e-ვის შეგვიძლია მოვძებნოთ D_e-სიმრავლის ელემენტები.

ბიჯებით ავაგოთ A ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლე ისეთი, რომ $C \equiv_T A$.

დავუშვათ, რომ A ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეა, შემოვიღოთ Δ_e აღნიშვნების $(\forall e = 0,1,2, \dots)$ უსასრულო სიმრავლე. აღნიშნული სიმრავლის აგებისას Δ_e აღნიშვნები მივანიჭოთ $(W_e^s - A^s)$ სიმრავლის გარკვეულ ელემენტებს. $(W_e^s - A^s)$ სიმრავლის ის ელემენტები, რომლებსაც ექნებათ Δ_e აღნიშვნა მუდმივად დარჩებიან A სიმრავლის გარეთ, რითაც დასრულდება კონსტრუქცია.

ვთქვათ T არის სიმრავლე იმ x ელემნტებისა, რომლებსაც აქვთ Δ_e აღნიშვნა რაიმე $e-$სთვის და ეს სიმრავლე იქნება მოწმე A სიმრავლის.

კოდირების მიზნით უზრუნველვყოთ, რომ თითოეული e-სთვის, თუ $x \in D_e$ აქვს Δ_i აღნიშვნა, მაშინ $i \leq e$ და თითოეული $i \leq e$ -თვის არსებობს უდიდესი $y \in D_e$ ელემენტი Δ_i აღნიშვნით. ასე, რომ უზრუნველვყავით არსებობა იმ უმცირესი $x \in D_e$ ელემენტისა, რომელსაც არასდროს ექნება აღნიშვნა, რადგან

$$|D_e| = e + 2.$$

კონსტუქცია.

0 ნაბიჯი: ვთქვათ $A^0 = \emptyset$.

s+1 ნაბიჯი: თითოეული $i \leq j \leq s$-სთვის, თუ არსებობს $x \in W_i^s$ ისეთი, რომ:

1) $x \in D_j - A^s$,
2) D_j სიმრავლის არცერთ ელემენტს არ ექნება Δ_i აღნიშვნა,
3) $y \in D_j \cap (W_i^s - A^s)$, სადაც $y \geq x$,

მაშინ x -ს მიენიჭება Δ_i აღნიშვნა. შემდეგ A სიმრავლეში გადავცეთ ყველა ის ელემენტი $x \in D_{g(s)}$, რომელსაც არ ექნება აღნიშვნა.

ვთქვათ

$$A = \bigcup_s A^s.$$

შევამოწმოთ, არის თუ არა A ეფექტურად არსად მარტივი. დავუშვათ, რომ ეს ასეა, მაშინ უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$T = \{x|x \text{ აქვს } \Delta_e \text{ აღნიშვნა რაიმე } e - \text{სთვის}\}$$

არის მოწმე A სიმრავლისთვის. კონსტრუქციის თანახმად T არის რ.გ. სიმრავლე და

$$T \cap A = \emptyset .$$

ვთქვათ $(W_e - A)$ არის უსასრულო, მაშინ

$$(W_e - A) \cap D_j \neq \emptyset$$

უსასრულოდ დიდი $j \geq e$-სთვის.

თუ $x \in (W_e - A) \cap D_j$, მაშინ $x \in W_i^s$ იქნება s ნაბიჯზე და თუ $e, j \leq s$, მაშინ $s + 1$ ნაბიჯზე.

კონსტრუქცია უზრუნველყოფს, რომ D_j სიმრავლის რაიმე ელემენტს ექნება Δ_e აღნიშვნა.

თუ $(W_e - A)$ უსასრულოა, მაშინ $(W_e \cap T)$ უსასრულოა და T არის მოწმე A სიმრავლისთვის.

ბოლოს ვაჩვენოთ, რომ $C \equiv_T A$. კონსტრუქციის თანახმად $x \in C$, თუ

$$(D_s \cap A) \neq \emptyset,$$

ასე რომ

$$C \leq_T A.$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $A \leq_T C$.

ვთქვათ მოცემულია ორაკულით C სიმრავლე და $n \in N$. შეგვიძლია ეფექტურად ვიპოვოთ e ისეთი, რომ $n \in D_e$. თუ $e \notin C$, მაშინ $n \notin A$. თუ $e \in C$, მაშინ იარსებებს ისეთი s ნაბიჯი, რომ

$$g(s) = e.$$

თუ $n \in A^{s+1}$, მაშინ ცხადია, რომ $n \in A$. ■

თეორემა (შორი [7]) 2.3. ყოველ არანულოვან რეკურსიულად გადათვლად **δ** ხარისხში არსებობს არაეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეები.

დამტკიცება. დავუშვათ C არის რ.გ სიმრავლე **δ** ხარისხიდან და

$$B = C \times N = \{\langle x, i\rangle | x \in C, i \in N\}.$$

ვთქვათ h არის ურთიერთცალსახა რეკურსიული ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლეა B. სიმრავლის ასაგებად გამოვიყენოთ უსასრულო სიმრავლე Δ_e აღნიშვნების ($\forall e = 0,1,2, \dots$), სადაც Δ_e-ით აღნიშნულია იმ სიმრავლის ის ელემენტები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ მოთხოვნებს. ავაგოთ B სიმრავლის არსად მარტივი, მჭიდრო A ქვესიმრავლე ისეთი, რომ $\forall n$-ვის

$$A^{(n)} = \{\langle n, x\rangle | \langle n, x\rangle \in A\} =^{*} B^{(n)} = \{\langle n, x\rangle | \langle n, x\rangle \in B\}.$$

კონსტუქცია. s ნაბიჯი: თითოეული $e < n \leq s$ ნომრისთვის, ვაჩვენოთ არსებობს თუ არა $\langle n, i\rangle \in W_e^s$, ისეთი რომ რაიმე $\langle n, j\rangle$ ელემენტს არ ექნება ეს Δ_e აღნიშვნა. შევუსაბამოთ Δ_e აღნიშვნა უმცირეს $\langle n, i\rangle$-ს. შემდეგ h(s) გადავცეთ A სიმრავლეში, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას ექნება აღნიშვნა.

ვთქვათ

$$A = \bigcup_{s} A^{n}$$

და A არ არის ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლე. დავუშვათ f არის A სიმრავლის მოწმე ფუნქცია.

თუ $n \notin C$, მაშინ

$$A^{(n)} = B^{(n)} = \emptyset.$$

აქედან გამომდინარე

$$W_{e_n} = N^{(n)} = \{\langle n, j\rangle | j \in N\},$$

მაშინ

$$\left| W_{e_n} - A \right| = \infty$$

და მივიღებთ, რომ $W_{f(e_n)} \subseteq N^{(n)}$ უსასრულოა.

თუ $n \in C$, მაშინ $B^{(n)} = N^{(n)}$ სიმრავლის უდიდესი n ელემენტები, სადაც თითოეული $e < n$, დარჩებიან A სიმრავლის გარეთ. რადგან

$$W_{f(e_n)} \subseteq N^{(n)} - A^{(n)},$$

მაშინ

$$|W_{f(e_n)}| \leq n,$$

რადგან, შეგვიძლია ეფექტურად გამოვთვალოთ $\{e_n\}_{n \in N}$ მიმდევრობა, ისე რომ

$$W_{e_n} = N^{(n)}.$$

თუ

$$(\exists s)\left(\left|W^s_{f(e_n)}\right| \geq n + 1\right),$$

სადაც $n \in C$, მაშინ C არის რეკურსიულად გადათვლადი. მაგრამ, რადგანაც C რეკურსიულია, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ახლა ვთქვათ A არსად მარტივი სიმრავლეა. თუ $(W_e - A)$ უსასრულოა, მაშინ რაიმე n-ვის $((W_e)^{(n)} - A)$ უსასრულოა. თუ $n \notin C$, აქედან გამომდინარე

$$A^{(n)} = B^{(n)} = \emptyset,$$

ისე, რომ $W_e{}^{(n)} \subseteq (W_e - A)$, ან უსასრულოდ დიდი n-ვის

$$W_e{}^{(n)} - A^{(n)} \neq \emptyset.$$

ნებისმიერ შემთხვევაში დავასაბუთებთ, რომ Δ_e აღნიშვნიანი x ელემენტის რაიმე სიმრავლე არის უსასრულო, რეკურსიულად გადათვლადი ქვესიმრავლე $(W_e - A)$ სიმრავლის. ასე, რომ A არის არაეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლე.

თუ $x = f(s) \in B$, მაშინ $x \in A$ და s ნაბიჯზე x გადავცემთ A სიმრავლეში. აქედან გამომდინარე

$$A \leq_T B \equiv_T C.$$

ზემოთ აღწერილის გათვალისწინებით, თუ

$$A \cap \{\langle n, 0\rangle, \langle n, 1\rangle, \dots, \langle n, n+1\rangle\} \neq \emptyset\ ,$$

მაშინ $x \in C$ და სამართლიანი იქნება, რომ

$$C \leq_T A. \qquad \blacksquare$$

თეორემა (მილერი და რემელი [6]) 2.4. ყოველ არანულოვან რეკურსიულად გადათვლად **δ** ხარისხში არსებობს რ.გ. სიმრავლე A ისეთი, რომ

$$A = A_0 \cup A_1,$$

$$A_0 \cap A_1 = \emptyset$$

და A_0 , A_1 ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეებია.

დამტკიცება. თუ გავითვალისწინებთ თორემა 2.3.-ს და წინადადება 1.2.-ს, A არის არაეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლე არანულოვან რეკურსიულად გადათვლად **δ** ხარისხში, რომელიც არ წარმოდგება ორი ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეთა გაერთიანების სახით. ■

თეორემა (მილერი და რემელი [6]) 2.5. ყოველ რეკურსიულად გადათვლად **δ** ხარისხში არსებობს რ.გ. სიმრავლე A ისეთი, რომ A არ წარმოდგება ორი არაეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეთა გაერთიანების სახით.

დამტკიცება. თეორემა 2.2.-ის თანახმად ყოველ რ.გ. **δ** ხარისხში არსებობს ეფექტურად არსად მარტივი A სიმრავლე და წინადადება 1.3.-ით აღნიშნული სიმრავლე არ წარმოადგენს ორი არაეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეთა გაერთიანებას. ■

3. მაქსიმალური სიმრავლეების დახასიათება არსად მარტივი სიმრავლეებით

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ M მაქსიმალური სიმრავლეა, თუ M რეკურსიულად გადათვლადია, $\overline{\mathrm{M}}$ უსასრულოა და

$$(\forall \mathrm{B})(\mathrm{B}\ \text{რ. გ.} \Rightarrow (\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{B})\ \text{სასრულია ან}\ (\overline{\mathrm{M}} \cap \overline{\mathrm{B}})\ \text{სასრულია}).$$

განსაზღვრა. A სიმრავლეს ეწოდება მაქსიმალური B სიმრავლეში, თუ A არის რეკურსიულად გადათვლადი, $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$, $(\mathrm{B}-\mathrm{A})$ უსასრულოა და არ არსებობს რეკურსიულად გადათვლადი W სიმრავლე ისეთი, რომ

$$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{W} \subseteq \mathrm{B}$$

და $(\mathrm{B}-\mathrm{W}), (\mathrm{W}-\mathrm{A})$ სიმრავლეები უსასრულოა.

განსაზღვრა. რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლის გაყოფას ორ, არაცარიელ სიმრავლედ ეწოდება არატრივიალური, თუ ორივე ქვესიმრავლე არარეკურსიულია.

$\mathrm{A} =^* \mathrm{B}$ აღნიშნავს, რომ $(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \cup (\mathrm{B}-\mathrm{A})$ არის სასრული.

თეორემა (ჰარიზანოვი [5]) 3.1. ვთქვათ A არის რეკურსიუალად გადათვლადი სიმრავლე. A სიმრავლის ყოველი არატრივიალური გაყოფა ორ რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლედ არსად მარტივი სიმრავლეებია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ (A არსად მარტივი სიმრავლეა, ან A არის მაქსიმალური რაიმე რეკურსიულ სიმრავლეში).

დამტკიცება.

$\Leftarrow$: ვთქვათ, რომ A არის არსად მარტივი სიმრავლე და

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_0 \cup \mathrm{A}_1,$$

სადაც

$$\mathrm{A}_0 \cap \mathrm{A}_1 = \emptyset\ .$$

ვაჩვენოთ, რომ A_0 არის არსად მარტივი სიმრავლე. ვთქვათ W არის რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთი, რომ $\mathrm{A}_0 \subseteq \mathrm{W}$ და $\mathrm{W}-\mathrm{A}_0$ არის უსასრულო. თუ $\mathrm{W} \cap \mathrm{A}_1$ უსასრულოა და

$$\mathrm{W} \cap \mathrm{A}_1 \subseteq \mathrm{W}-\mathrm{A}_0,$$

მაშინ $\mathrm{W} \cap \mathrm{A}_1$ არის ჩვენთვის საჭირო რ.გ სიმრავლე. სხვა შემთხვევაში $(\mathrm{W}-\mathrm{A})$ იქნება უსასრულო.

A სიმრავლის არსად მარტივობის გათვალისწინებით, არსებობს უსასრულო რ.გ სიმრავლე R ისეთი, რომ $R \subseteq (W - A)$, აქედან გამომდინარე $R \subseteq (W - A_0)$. საბოლოოდ მივიღეთ, რომ A_0 არის არსად მარტივი სიმრავლე. ამავე მეთოდით ვაჩვენებთ A_1 სიმრავლის არსად მარტივობას.

დავუშვათ A არის მაქსიმალური სიმრავლე B რეკურსიულ სიმრავლეში, მაშინ $A \subseteq B$ და $(B - A)$ უსასრულოა. ვაჩვენოთ, რომ A_0 და A_1 არსად მარტივებია.

ვთქვათ

$$A = A_0 \cup A_1 ,$$

სადაც

$$A_0 \cap A_1 = \emptyset$$

და A_0, A_1 არიან არარეკურსიული რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეები. ვაჩვენოთ, რომ A_0 ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეა, თუ $A_1 \cup \overline{B}$ არის შესაბამისი მოწმე სიმრავლე.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, $A_1 \cup \overline{B}$ არ არის მოწმე სიმრავლე, მაშინ არსებობს რ.გ W სიმრავლე ისეთი, რომ $A_0 \subseteq W$, $(W - A_0)$ უსასრულოა და

$$W \cap (A_1 \cup \overline{B}\,) = \emptyset.$$

რადგან A არის მაქსიმალური B სიმრავლეში, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $(B - W)$ სასრულია, საიდანაც გამომდინარობს

$$\overline{A_1} =^* W \cup \overline{B}\,.$$

მივდივართ იქამდე, რომ $\overline{A_1}$ არის რ.გ სიმრავლე, რაც ეწინააღმდეგება $\overline{A_1}$ სიმრავლის არარეკურსიულობას. ანალოგიურად დგინდება A_1 სიმრავლის ეფექტურად არსად მარტივობა.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა $\Longrightarrow$: ვთქვათ A არ არის არსად მარტივი სიმრავლე და A არ არის მაქსიმალური რაიმე რეკურსიულ სიმრავლეში. ვაჩვენოთ, რომ რეკურსიულად გადათვლადი A სიმრავლის არა ტრივიალური გაყოფის დროს, მინიმუმ ერთი ქვესიმრავლე მაინც არ არის არსად მარტივი.

დაშვების თანახმად, თუ A არ არის არსად მარტივი, მაშინ არსებობს W რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთი, რომ $A \subseteq W$, $(W - A)$ არის უსასრულო და $(W - A)$ არ შეიცავს უსასრულო რ.გ ქვესიმრავლეებს. თუ W არარეკურსიულია, მაშინ $U \coloneqq W$. თუ W რეკურსიულია, მაშინ A არ არის მაქსიმალური W-სიმრავლეში, აქედან გამომდინარე არსებობს U რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთი, რომ

$$A \subseteq U \subseteq W$$

და ორივე სიმრავლე $(W-U)$, $(U-A)$ უსასრულოა.

თუ

$$W-U=W\cap\overline{U}$$

არის უსასრულო, რეკურსიულად გადათვალადი ქვესიმრავლე $(W-A)$ სიმრავლის, მაშინ U არარეკურსიუალია. სხვა შემთხვევაში იარსებებს არარეკურსიული U სიმრავლე ისეთი, რომ $A\subseteq U$, $(U-A)$ არის უსასრულო და $(U-A)$ არ შეიცავს უსასრულო რეკურსიულად გადათვლად ქვესიმრავლეს.

ვთქვათ U სიმრავლე გავყოთ ორ U_0, U_1 არარეკურსიულ რ.გ სიმრავლედ და

$$A_i\coloneqq U_i\cap A,\qquad (\forall i\in\{0,1\}).$$

თუ (U_0-A_0) და (U_1-A_1) სიმრავლეები უსასრულოა, მაშინ A_0 და A_1 არ არიან არსად მარტივი სიმრავლეები. აქედან გამომდინარე, არატრივიალური გაყოფის განსაზღვრის თანახმად, ორივე A_0 და A_1 არარეკურსიულებია.

მაგალითად, ვთქვათ U_0-A_0 უსასრულოა და U_1-A_1 სასრულია. ცხადია A_0 არ არის არსად მარტივი სიმრავლე, აქედან გამომდინარე A_0 რეკურსიული არ არის. გარდა ამისა A_1 სიმრავლეც არარეკურსიულია, რადგან

$$A_1=^{*}U_1.\qquad\blacksquare$$

თეორემა (ჰარიზანოვი [5]) 3.2. ვთქვათ A არის რეკურსიუალად გადათვლადი სიმრავლე. A-სიმრავლის ყოველი არატრივიალური გაყოფა ორ რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლედ, წარმოადგენს ეფექტუად არსად მარტივ სიმრავლეებს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ (A ეფექტუად არსად მარტივ სიმრავლეა ან A არის მაქსიმალური რაიმე რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეში).

დამტკიცება.

$\Leftarrow$: ვთქვათ, რომ A არის არსად მარტივი სიმრავლე. თეორემა 1.2 -ის ან წინადადება 1.3 -ის გათვალისწინებით, A სიმრავლის ყოველი არატრივიალური გაყოფა წარმოადგენს ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეებს.

თუ A არის მაქსიმალური რაიმე რ.გ. სიმრავლეში, მაშინ თეორემა 3.1 -ის დამტკიცებიდან გამომდინარეობს, რომ A სიმრავლის ყოველი არატრივიალური გაყოფა, ორ რ.გ სიმრავლეებად, წარმოადგენს ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეებს.

$\Rightarrow$: დავუშვათ, რომ A არც ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეა და არც მაქსიმალურია რაიმე რეკურსიულ სიმრავლეში. ვაჩვენოთ, რომ A სიმრავლის

არატრივიალურ გაყოფში, ერთი ქვესიმრავლე მაინც არ იქნება ეფექტურად არსად მარტივი.

თუ A სიმრავლე არ არის არსად მარტივი, მაშინ თეორემა 3.1 -ის დამტკიცებიდან გამომდინარეობს, რომ A_0 და A_1 არ არიან არსად მარტივი ქვესიმრავლეები. აქედან გამომდინარე, არატრივიალური გაყოფის განსაზღვრის თანახმად, ორივე A_0 და A_1 არარეკურსიულებია.

ვთქვათ A არაეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეა. რადგან A არარეკურსული სიმრავლეა. შეგვიძლია გავყოთ ეს სიმრავლე ორ, A_0 და A_1 არარეკურიულ სიმრავლეებად ისე, რომ

$$A = A_0 \cup A_1 \text{ და } A_0 \cap A_1 = \emptyset.$$

თეორემა 1.2 -ის გათვალისწინებით, A სიმრავლე არ გაიყოფა ორ, ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავეებად, აქედან გამომდინარე A_0 და A_1 არ წარმოადგენენ ეფექტურად არსად მარტივ ქვესიმრავლეებს. ■

თეორემა (მილერი & რემელი [6]) 3.3. ვთქვათ M არის მაქსიმალური სიმრავლე და გაყოფილია ორ M_1, M_2 რეკურსიულად გადათვლად არარეკურსიულ სიმრავლეებად, მაშინ ორივე სიმრავლე ეფექტურად არსად მარტივებია.

დამტკიცება. თუ გავითვალისწინებთ მოწმე სიმრავლის განსაზღვრას, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ M_2 არის მოწმე M_1 სიმრავლის და შებრუნებული ვარიანტიც სამართლიანია.

ვთქვათ W რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთია, რომ $(W - M_1)$ არის უსასრულო, მაგრამ $(W \cap M_2)$ სასრულია. მაშინ

$$W \cup M_1 \cup M_2 \neq^* M_1 \cup M_2 = M.$$

მაქსიმალური სიმრავლის განმარტებიდან, სამართლიანია

$$W \cup M_1 \cup M_2 =^* N.$$

მაგრამ, რადგანაც

$$\overline{M_2} =^* W \cup M_1$$

არის რეკურსიულად გადათვლადი, ამიტომ M_2 რეკურსიული სიმრავლეა. ■

თეორემა (მილერი & რემელი [6]) 3.4. ვთქვათ S სიმავლე მარტივია და გაყოფილია ორ S_1, S_2 რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლებად. თუ S_i არსად მარტივია, მაშინ S_i წარმოადგენს ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეს, სადაც $i = 1,2$.

დამტკიცება. ვთქვათ S_1 არის არსად მარტივი, მაშინ სამართლიანია მოვითხოვოთ რომ S_2 იყოს მოწმე S_1-სიმრავლის.

ვთქვათ W რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა. თუ $(W - S_1)$ არის უსასრულო, მაგრამ $(W \cap S_2)$ სასრულია, მაშინ არსად მარტივი სიმრავლის განსაზღვრიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვიპოვოთ უსასრულო რეკურსიული სიმრავლე $R \subseteq (W - S_1)$ ისეთი, რომ

$$R \cap S_2 = \emptyset.$$

რადგანაც $R \subseteq \bar{S}$, მივიღეთ საწინააღმდეგო, რომ S სიმრავლე არ არის მარტივი. ■

4. არსად მარტივი სიმრავლეების კავშირი Q დაყვანადობასთან

განსაზღვრა. ამბობენ, რომ A სიმრავლე არის Q დაყვანადი B სიმრავლეზე (სიმბოლურად: $A \leq_Q B$), თუ

$$\big(\exists f - \text{რეკურსიული ფუნქცია}\big)\ (\forall x)\ \big(x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B\big).$$

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ A არის Q_k დაყვანადი B-ზე და აღნიშნავენ $A \leq_{Q_k} B$ -ით, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$(\exists f \text{ -რეკურსიული ფუნქცია})\ (\forall x)\ \big(x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B \text{ და } |W_{f(x)}| < \infty\big).$$

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ A სიმრავლე Q-ექვივალენტურია B სიმრავლის (სიმბოლურად: $A \equiv_Q B$), თუ

$$A \leq_Q B \text{ და } B \leq_Q A.$$

A სიმრავლის Q-ხარისხი აღინიშნება $\deg_Q(A)$-ით და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\deg_Q(A) = \{B: B \equiv_Q A\}.$$

ქვემოთ ნაჩვენებია, რომ თუ რ.გ Q ხარისხი შეიცავს არსად მარტივ სიმრავლეს, მაშინ ამ ხარისხში შემავალი ყოველ რეკურსიულად გადათვალი სიმრავლე იქნება არსად მარტივი.

ბუნებრივად ისმის კითვა: ყოველი რ.გ არარეკურსიული Q ხარისხი შეიცავს თუ არა მარტივ ან არსად მარტივ სიმრავლეს? უარყოფით პასუხს ამ კითხვაზე იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა (ომანაძე [1]) 4.1. ყოველი არარეკურსიული რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლის T ხარისხი შეიცავს ისეთ რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეს, რომლის Q ხარისხი არ შეიცავს არც მარტივ და არც არსად მარტივ სიმრავლეებს.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ შემდეგი წინადადებები, შედეგები და თეორემები.

დასაწყისისთვის მოვიყვანოთ სოლოვევის ასეთი შედეგი.

თეორემა (სოლოვევი [4]) 4.2. თუ A და B რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეებია, მაშინ

$$A \leq_Q B \Leftrightarrow A \leq_{Q_k} B.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $A \leq_Q B$, ანუ სამართლიანია

$$x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B.$$

მოვახდინოთ სიმრავლის „ჩამოჭრის“ ასეთი პროცესი: ვითვლით $W_{f(x)}$ სიმრავლის პირველ ელემენტს და ამ ელემენტს გადავცემთ $W_{g(x)}$-ში. ველოდებით, გამოითვლება თუ არა ეს ელემენტი B სიმრავლეში (ერთდროულად ვითვლით A და B სიმრავლეებს). თუ გამოითვლება, მაშინ ვითვლით $W_{f(x)}$ -ის მეორე ელემენტს და მას გადავცემთ $W_{g(x)}$-ში და ა.შ. თუ რომელიმე ელემენტი არ აღმოჩნდება B-სიმრავლეში, ან x გამოითვლება A-სიმრავლეში, მაშინ პროცესი გაჩერდება.

საბოლოოდ ავაგებთ ახალ $W_{g(x)}$ სიმრავლეს, რომელიც შედგება ამ ელემენტებისგან და სადაც g(x) რეკურსიული ფუნქციაა. მაშინ ცხადია, რომ A დაყვანადია Q_k-ით B-სიმრავლეზე g ფუნქციით. ■

განსაზღვრა. $|W|$ არის W სიმრავლის სიმძლავრე.

წინადადება (ომანაძე [1]) 4.1. ვთქვათ A რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა, B არსად მარტივი სიმრავლეა და

$$A \leq_Q B,$$

მაშინ A არის არსად მარტივი სიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ A რ.გ სიმრავლეა, B არსად მარტივი სიმრავლეა და f რეკურსიული ფუნქცია ისეთია, რომ

$$(\forall x)\big(x \epsilon A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B\big),$$

$$(\forall x)\big(|W_{f(x)}| < \infty\big).$$

ვთქვათ W რ.გ სიმრავლე ისეთია, რომ $|W \backslash A| = \infty$.

ვთქვათ

$$C = \bigcup_{x \in W} W_{f(x)} \backslash B.$$

განვიხილოთ შემთხვევები: ა) $|C| < \infty$ და ბ) $|C| = \infty$.

ა): ვთქვათ $|C| < \infty$ და

$$U = \{x: W_{f(x)} \cap C \neq \emptyset\}.$$

ცხადია

$$W \backslash A \subseteq U \text{ და } W \cap U = W \backslash A.$$

აქედან გამომდინარე $W\setminus A$ შეიცავს უსასრულო რეკურსიულად გადათვლად ქვესიმრავლეებს.

ბ): ვთქვათ $|C| = \infty$ და რადგან B არსად მარტივია, მოიძებნება ისეთი რეკურსიულად გადათვლადი V სიმრავლე, რომ

$$|C| = \infty \text{ და } V \subseteq C.$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$\{x: W_{f(x)} \cap V \neq \emptyset\}.$$

რადგან

$$(\forall x)(|W_{f(x)}| < \infty),$$

მაშინ

$$|\{x: W_{f(x)} \cap V \neq \emptyset\} \cap W| = \infty$$

და

$$\{x: W_{f(x)} \cap V \neq \emptyset\} \subseteq W\setminus A. \quad \blacksquare$$

წინადადება (ომანაძე [1]) 4.2. ვთქვათ A და B არსად მარტივი სიმრავლეებია, მაშინ $A\oplus B$ არსად მარტივია.

დამტკიცება. ვთქვათ W რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა და

$$|W\setminus A\oplus B| = \infty,$$

მაშინ

$$|\{2x: 2x \in W\}\setminus A\oplus B| = \infty,$$

ან

$$|\{2x+1: 2x+1 \in W\}\setminus A\oplus B| = \infty.$$

ვთქვათ

$$|\{2x: 2x \in W\}\setminus A\oplus B| = \infty,$$

მაშინ

$$|\{x: 2x \in W\}\setminus A| = \infty.$$

რადგან A სიმრავლე არსად მარტივია, მაშინ არსებობს უსასრულო, რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე C ისეთი, რომ

$$C \subseteq \{x: 2x \in W\}\setminus A\,.$$

ვთქვათ

$$C_1 = \{2x: x \in C\},$$

მაშინ

$$|C_1| = \infty \text{ და } C_1 \subseteq W \backslash A \oplus B.$$

ზუსტად იგივე დამტკიცების პროცესი მიმდინარეობს იმ შემთხვევაში, როცა

$$|\{2x+1: 2x+1 \in W\} \backslash A \oplus B| = \infty . \quad \blacksquare$$

ლემა (ომანაძე [2]) 4.1. ვთქვათ A რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა და B ისეთია, რომ

$$A \leq_Q B \leq_Q C$$

მაშინ $A \leq_{Q_k} B$.

დამტკიკცება. ვთქვათ, რომ არსებობს ისეთი f და g რეკურსიული ფუნქციები, რომ

$$(\forall x)\left(x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B\right),$$

$$(\forall x)\left(x \in B \Leftrightarrow W_{g(x)} \subseteq C\right).$$

ნაბიჯ-ნაბიჯ ავაგოთ ისეთი h რეკურსიული ფუნქცია, რომ

(1) $(\forall x)\left(|W_{h(x)}| < \infty\right)$

(2) $(\forall x)\left(x \in A \Leftrightarrow W_{h(x)} \subseteq B\right)$.

ნაბიჯი 0: $W_{h(x)}$ სიმრავლის პირველ ელემენტად ავიღოთ ისეთი y_1-ი, რომელიც აღმოჩნდება $W_{f(x)}$-ის გადათვლისას (გავითვალისწიონთ დამატებით, რომ

$$(\forall x)\left(W_{f(x)} \neq \emptyset\right)).$$

ნაბიჯი s: ვთქვათ ამ ეტაპზე გვაქვს

$$W_{h(x)} = \{y_1^x, \dots \dots \dots, y_k^x\},$$

და აგებულია სიმრავლეები

$$F_{y_1^x,s}, F_{y_2^x,s}, \dots \dots \dots, F_{y_k^x,s},$$

სადაც

$$F_{y_i^x,s} \subseteq W_{g(y_i^x),s} \quad ,(i = 1, .. k).$$

მოცემულ s ნაბიჯზე გადათვლილი გვექნება სიმრავლეები:

$$A,\ W_{f(x)},\ C,\ W_{g(y_i^x)}, \quad (i = 1, \dots k).$$

თუ $x \in A_s$, მაშინ აღნიშნული სიმრავლის აგების პროცესი აქ გაჩერდება.

თუ $x \notin A_s$, მაშინ ვამოწმებთ ადგილი აქვს თუ არა ასეთ მიმართებას:

$$(\forall i)\left(1 \leq i \leq k \Rightarrow F_{y_i^x,s} \subseteq C_s\right).$$

თუ ასეთი მიმართება სრულდება, მაშინ $W_{h(x)}$-ის პირველ ელემენტად ავიღოთ y_{k+1}^x, რომელიც $W_{f(x)}$-ის ელემენტებში y_k^x-ელემენტის შემდეგაა წარმოდგენილი.

ყოველი i-სთვის $(i = 1, \dots k)$მივიღებთ მიმდევრობას:

$$z_i = \min\{z : z \in W_{g(y_i^x),s} \backslash F_{y_i^x,s}\},$$

თითოეული z_i გადავცეთ $F_{y_i^x,s+1}$ სიმრავლეში და გადავიდეთ შემდეგ ნაბიჯზე.

ძნელი არაა დავინახოთ, რომ ჩვენს მიერ აგებულ $F_{y_i^x}$ სიმრავლეთა აგების პროცესი შეწყდება, მას შემდეგ რაც დასრულდება ნაბიჯების გადათვლა და $W_{h(x)}$ დააკმაყოფილებს (1) და (2) მოთხოვნებს. ■

თეორემა (ომანაძე [1]) 4.3. ვთქვათ A მარტივი სიმრავლეა, B ნებისმიერი სიმრავლეა, C არსად მარტივი სიმრავლეა, K რეკურსიულად გადათვლადი Q სრული სიმრავლეა და

$$A \leq_Q B \oplus C \leq_Q K,$$

მაშინ $A \leq_Q B$.

თორემის დასამტკიცებლად ვისარგებლოთ შემდეგით:

ლემა (ომანაძე [1]) 4.2. ვთქვათ A მარტივი სიმრავლეა, B ნებისმიერია, C არსად მარტივი სიმრავლეა და f ფუნქციით

$$A \leq_{Q_k} B \oplus C,$$

თუ W რ.გ სიმრავლე ისეთია, რომ $W \backslash A$ უსასრულოა, მაშინ

(1) $\left|\left\{2x+1 : 2x+1 \in \bigcup_{y \in W} W_{f(y)}\right\} \cap \overline{B \oplus C}\right| < \infty$

(2) $\left|\left\{2x : 2x \in \bigcup_{y \in W} W_{f(y)}\right\} \cap \overline{B \oplus C}\right| = \infty.$

დამტკიცება. ვთქვათ ლემის პირობები სრულდება

$$(\forall x)\left(x \epsilon A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B \oplus C\right)$$
$$(\forall x)\left(|W_{f(x)}| < \infty\right).$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$\left|\left(\bigcup_{y \in W} W_{f(y)}\right) \cap \overline{B \oplus C}\right| = \infty.$$

თუ

$$\left|\left(\bigcup_{y \in W} W_{f(y)}\right) \cap B \oplus C\right| < \infty,$$

დავუშვათ, რომ

$$\widetilde{W} = \{x : W_{f(x)} \cap (\bigcup_{y \in W} W_{f(y)} \backslash B \oplus C) \neq \emptyset\},$$

მაშინ

$$W \backslash A \subseteq \widetilde{W} \text{ და } \widetilde{W} \cap A = \emptyset,$$

გამოდის, რომ $\widetilde{W}$ უსასრულო რეკურსიულად გადათვლადია და შედის $\bar{A}$ სიმრავლეში, რაც შეუძლებელია A სიმრავლის სიმარტივიდან გამომდინარე.

ვთქვათ

$$W_1 = \left\{2x+1: 2x+1 \in \bigcup_{y \in W} W_{f(y)}\right\},$$

$$W_2 = \{x: 2x+1 \in W_1\},$$

დავუშვათ, რომ

$$|W_1 \backslash B \oplus C| = \infty,$$

მაშინ

$$|W_2 \backslash C| = \infty.$$

C არსად მარტივი სიმრავლის განმარტებიდან გამომდინარე W_3 უსასრულო, რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთია, რომ $W_3 \subseteq W_2 \backslash C$.

ვთქვათ

$$W_4 = \{2x+1: x \in W_3\}$$

რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა, მაშინ გამოდის, რომ

$$W_4 \subseteq \overline{B \oplus C} \text{ და } W_4 \subseteq W_1.$$

დავუშვათ ახლა, რომ

$$W_5 = \{x: W_{f(x)} \cap W_4 \neq \emptyset\},$$

რადგან

$$(\forall x)(|W_{f(x)}| < \infty)$$

მაშინ $|W_5| = \infty$. მივიღეთ, რომ W_5 უსასრულო, რ.გ სიმრავლე შედის $\bar{A}$ სიმრავლეში. რაც ეწინააღმდეგება A მარტივი სიმავლის განმარტებას. ამიტომ

$$|W_1 \cap \overline{B \oplus C}| < \infty$$

და ცხადია, რომ

$$\left|\{2x: 2x \in \cup_{y \in W} W_{f(y)}\} \cap \overline{B \oplus C}\right| = \infty. \qquad \blacksquare$$

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა 4.3:

ვთქვათ A მარტივი სიმრავლეა, B ნებისმიერია, C არსად მარტივი სიმრავლეა, ლემა 4.1-ის გათვალისწინებით იარსებებს f რეკურსიული ფუნქცია ისეთი, რომ

(1) $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B \oplus C)$,

(2) $(\forall x)(|W_{f(x)}| < \infty)$.

შემოვიტანოთ ასეთი აღნიშვნა:

$$R=\{2x+1: 2x+1\in \bigcup_{y\in W} W_{f(y)} \setminus B\oplus C\},$$

ლემა 4. 2-ის გათვალისწინებით $|R|<\infty$.

ვთქვათ, რომ

$$W_{f_1(x)}=\{2x: 2x\in W_{f(x)}\},$$
$$R_1=\{x\in W_{f(x)}\cap R\neq\emptyset\}.$$

მაშინ $R_1\subset\overline{A}$ და A სიმრავლის სიმარტივიდან გამომდინარეობს, რომ $|R_1|<\infty$. ავიღოთ რეკურსიული ფუნქცია f_2 ისეთი, რომ

$$W_{f_2(x)}=\begin{cases} W_{f_2(x)}, & \text{თუ } x\notin R_1\\ \{a\}, & \text{თუ } x\in R_1\end{cases}$$

სადაც ელემენტი $a\in\overline{B}$.

მაშინ

$$x\in A\Longrightarrow W_{f(x)}\subseteq B\oplus C \text{ და } x\notin R_1\Longrightarrow W_{f_2(x)}=W_{f_1(x)}\subseteq B,$$

თუ $x\notin A$, მაშინ $x\in R_1$ ან $x\notin R_1$. განვიხილოთ ეს ორი შემთხვევა ცალ-ცალკე.

თუ $x\in R_1$, მაშინ

$$W_{f_2(x)}=\{a\}\subseteq\overline{B}\Longrightarrow W_{f_2(x)}\not\subseteq B.$$

თუ $x\notin R_1$, მაშინ

$$W_{f(x)}\subseteq B\oplus C \text{ და } W_{f(x)}\cap R=\emptyset\Longrightarrow W_{f_1(x)}\not\subseteq B \text{ და } W_{f_2(x)}=W_{f_1(x)}\Longrightarrow W_{f_2(x)}\not\subseteq B.$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$(\forall x)\big(x\in A\Leftrightarrow W_{f_2(x)}\subseteq B\big). \qquad \blacksquare$$

განსაზღვრა. ამბობენ, რომ A სიმრავლე არის m დაყვანადი B სიმრავლეზე (სიმბოლურად:$A\leq_m B$), თუ

$$\big(\exists f-\text{რეკურსიული ფუნქცია}\big)(\forall x)(x\in A\Leftrightarrow f(x)\in B).$$

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ A სიმრავლე m-ექვივალენტურია B სიმრავლის (სიმბოლურად: $A\equiv_m B$), თუ

$$A\leq_m B \text{ და } B\leq_m A.$$

A სიმრავლის m-ხარისხი აღინიშნება $\deg_m(A)$-ით და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\deg_m(A)=\{B: B\equiv_m A\}.$$

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ A სიმრავლე არასადარია Q-ით B სიმრავლის (სიმბოლურად: $A|_Q B$), თუ

$$A\not\leq_Q B \text{ და } B\not\leq_Q A.$$

წინადადება (ომანაძე [1]) 4.3. ვთქვათ A არ არის არსად მარტივი სიმრავლე, B არსად მარტივი სიმრავლეა, ვთქვათ A და B სიმრავლეები Q-არასადარებია ($A|_Q B$), მაშინ $A \oplus B$ სიმრავლის Q-ხარისხი არ შეიცავს არც მარტივ და არც არსად მარტივ სიმრავლეებს.

დამტკიცება. რადგან A არ არის არსად მარტივი და

$$A \leq_m A \oplus B,$$

მაშინ $A \oplus B$ არ არის არსად მარტივი; აქედან გამომდინარე $A \oplus B$ სიმრავლის Q-ხარისხი არ შეიცავს არსად მარტივ სიმრავლეებს.

ვთქვათ S მარტივი სიმრავლეა და

$$S \equiv_Q A \oplus B \,,$$

მაშინ

$$S \equiv_Q A \oplus B \Leftrightarrow \left(S \leq_Q A \oplus B \;\&\; A \oplus B \leq_Q S\right),$$

$$S \equiv_Q A \leq_m A \oplus B \Rightarrow S \leq_Q A \leq_m A \oplus B \leq_Q S \Rightarrow S \equiv_Q A \Rightarrow A \equiv_Q A \oplus B \Rightarrow B \leq_Q A,$$

რადგან $A \oplus B$ სიმრავლის Q-ხარისხი არ შეიცავს მარტივ სიმრავლეებს, ამიტომ

$$B \leq_Q A.$$

ეს კი ეწინააღმდეგება $A|_Q B$ -ის პირობას. ■

ახლა მივუბრუნდეთ თეორემა 4.1-ის დამტკიცებას: ვთქვათ, რომ **a** ნებისმიერი არარეკურსიული რეკურსიულად გადათვლადი T-ხარისხია, A რ.გ სიმრავლე შედის **a**-ში, B, C რ.გ სიმრავლეები ისეთია, რომ

$$A = B \cup C,$$

$$B \cap C = \emptyset$$

და B, C ტიურინგით არასადარებია (სიმბოლურად: $A|_T B$).

ვთქვათ B_1 რ.გ. სიმრავლე არ არის არსად მარტივი და

$$B_1 \equiv_T B,$$

ხოლო C_1 არსად მარტივია და

$$C_1 \equiv_T C,$$

მაშინ წინადადება 4.3-ის გათვალისწინებით $B_1 \oplus C_1$ სიმრავლის Q-ხარისხი არ შეიცავს არსად მარტივ და მარტივ სიმრავლეებს. ცხადია, რომ

$$A \equiv_T B_1 \oplus C_1. \qquad ■$$

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ A სიმრავლე sQ-დაყვანადია B სიმრავლეზე ($A \leq_{sQ} B$), თუ არსებობს რეკურსიული f ფუნქცია ისეთი, რომ

$$(\forall x, y)\left[\left(x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B\right) \& \left(y \in W_{f(x)} \Rightarrow y < g(x)\right)\right].$$

თორემა (ომანაძე [3]) 4.4. ვთქვათ A მარტივი სიმრავლეა, B სიმრავლე ნებისმიერია და C არსად მარტივია, მაშინ

$$A \leq_{sQ} B \oplus C \Rightarrow A \leq_{sQ} B.$$

თეორემის დამტკიცებამდე განვიხილოთ ასეთი ლემა:

ლემა (ომანაძე [3]) 4.3. ვთქვათ A სიმრავლე მარტივია, B სიმრავლე ნებისმიერია, C არსად მარტივია, f და g რეკურსიული ფუნქციებია და f, g ფუნქციებით

$$A \leq_{sQ} B \oplus C,$$

და W-რ.გ სიმრავლე ისეთია, რომ $W \setminus A$ უსასრულოა, მაშინ

$$(1)\ \left|\left\{2x+1: 2x+1 \in \textstyle\bigcup_{y \in W} W_{f(y)}\right\} \cap \overline{B \oplus C}\right| < \infty$$

$$(2)\ \left|\left\{2x: 2x \in \textstyle\bigcup_{y \in W} W_{f(y)}\right\} \cap \overline{B \oplus C}\right| = \infty.$$

დამტკიცება: ვთქვათ სრულდება ლემის პირობები და ვაჩვენოთ, რომ

$$\left|\bigcup_{y \in W} W_{f(y)} \setminus B \oplus C\right| = \infty.$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო:

$$\left|\bigcup_{y \in W} W_{f(y)} \setminus B \oplus C\right| < \infty,$$

და ვთქვათ

$$\widetilde{W} = \left\{x: W_{f(x)} \cap \left(\bigcup_{y \in W} W_{f(y)} \setminus B \oplus C\right) \neq \emptyset\right\},$$

მაშინ

$$W \setminus A \subseteq \widetilde{W} \text{ და } \widetilde{W} \cap A = \emptyset.$$

მივიღებთ, რომ $\widetilde{W}$ უსასრულო რეკურსიულად გადათვლადია და შედის $\overline{A}$ სიმრავლეში, რაც შეუძლებელია A სიმრავლის სიმარტივიდან გამომდინარე.

ვთქვათ

$$W_1 = \left\{2x+1: 2x+1 \in \bigcup_{y\in W} W_{f(y)}\right\},$$

$$W_2 = \{x: 2x+1 \in W_1\},$$

დავუშვათ, რომ

$$|W_1 \backslash B \oplus C| = \infty,$$

მაშინ

$$|W_2 \backslash C| = \infty.$$

C არსად მარტივი სიმრავლის განმარტებიდან გამომდინარე W_3 უსასრულო, რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთია, რომ

$$W_3 \subseteq W_2 \backslash C.$$

ვთქვათ

$$W_4 = \{2x+1: x \in W_3\}$$

რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა, მაშინ გამოდის, რომ

$$W_4 \subseteq \overline{B \oplus C}$$

და

$$W_4 \subseteq W_1.$$

ახლა დავუშვათ, რომ

$$W_5 = \{x: W_{f(x)} \cap W_4 \neq \emptyset\},$$

რადგან

$$(\forall x)(|W_{f(x)}| < \infty),$$

ამიტომ $|W_5| = \infty$.

მივიღეთ, რომ W_5 უსასრულო, რ.გ სიმრავლე შედის $\overline{A}$ სიმრავლეში. რაც ეწინააღმდეგება A მარტივი სიმავლის განმარტებას. ამიტომ

$$|W_1 \cap \overline{B \oplus C}| < \infty. \qquad \blacksquare$$

ახლა დავამტკიცოთ თორემა 4.4:

ვთქვათ A სიმრავლე მარტივია, B სიმრავლე ნებისმიერია, C არსად მარტივია, f და g რეკურსიული ფუნქციები ისეთია, რომ

$$(\forall x, y)\left[\left(x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B \oplus C\right) \& \left(y \in W_{f(x)} \Rightarrow y < g(x)\right)\right].$$

დავუშვათ

$$R = \{2x+1: 2x+1 \in \cup_{x\in N} W_{f(x)} \backslash B \oplus C\},$$

მაშინ ლემა 4. 3-ის გათვალისწინებით $|R| < \infty$.

ვთქვათ, რომ

$$W_{f_1(x)} = \{2x: 2x \in W_{f(x)}\},$$
$$R_1 = \{x \in W_{f(x)} \cap R \neq \emptyset\}.$$

მაშინ $R_1 \subset \overline{A}$ და A სიმრავლის სიმარტივიდან გამომდინარეობს, რომ $|R_1| < \infty$.

განვსაზღვროთ f_2 რეკურსიული ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$W_{f_2(x)} = \begin{cases} W_{f_1(x)}, & \text{თუ } x \notin R_1 \\ \{a\}, & \text{თუ } x \in R_1 \end{cases}$$

სადაც ელემენტი $a \in \overline{B}$.

მაშინ

$$x \in A \Longrightarrow W_{f(x)} \subseteq B \oplus C \ \text{ და } \ x \notin R_1 \Longrightarrow W_{f_2(x)} = W_{f_1(x)} \subseteq B.$$

თუ $x \notin A$, მაშინ $x \in R_1$ ან $x \notin R_1$. განვიხილოთ ეს ორი შემთხვევა ცალ-ცალკე.

თუ $x \in R_1$, მაშინ

$$W_{f_2(x)} = \{a\} \subseteq \overline{B} \Longrightarrow W_{f_2(x)} \nsubseteq B.$$

თუ $x \notin R_1$, მაშინ

$$W_{f(x)} \nsubseteq B \oplus C \ \text{ და } \ W_{f(x)} \cap R = \emptyset \Longrightarrow W_{f_1(x)} \nsubseteq B \ \text{ და } \ W_{f_2(x)} = W_{f_1(x)} \Longrightarrow W_{f_2(x)} \nsubseteq B.$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$(\forall x)\big(x \in A \Leftrightarrow W_{f_2(x)} \subseteq B\big).$$

და f_2 რეკურსიული ფუნქციით A სიმრავლე sQ-დაყვანადია B სიმრავლეზე და

$$g_1(x) = g(x) + a. \qquad \blacksquare$$

დასკვნა

ნაშრომი ეძღვნება არსად მარტივ სიმრავლეთა კლასს, რომელიც რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა სხვა კლასებთან შედარებით ნაკლებადაა შესწავლილი. ამ კლასის ცნება შემოიტანა რ. შორმა და აჩვენა, რომ მთელი რეკურსიულად გადათვალდ სიმრავლეთა კლასი შეიძლება წარმიოქმნას არსად მარტივ ურთიერთარამკვეთ სიმრავლეთა გაერთიანებით. შემდეგში, სხვადასხვა ავტორმა დაადგინა მრავალი საინტერესო თვისება არსად მარტივი სიმრავლეებისა.

ნაშრომში ერთიანი სახით გადმოცემულია სხვადასხვა ავტორის მიერ მიღებული საინტერესო შედეგები არსად მარტივი სიმრავლეების შესახებ. კერძოდ, მოყვანილია რ. შორის თეორემა, რომ ყოველ რეკურსიულად გადათვლად ტიურინგის ხარისხში არსებობს არსად მარტივი სიმრავლე; ასევე, მაქსიმალური სიმრავლის დახასიათება არსად მარტივი სიმრავლის ტერმინებში, რომელიც ეკუთვნის დ. მილერსა და ჯ. რემელს.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Р. Ш. Оманадзе, “Q-Сводимость и Нигде Непростые Множества”, сообшения академии наук грузинскои сср, 127, № 1, 1987.
2. Р. Ш. Оманадзе, Алгебра и Логика, 23, № 2, 1984, 175-184.
3. Р. Ш. Оманадзе, “Соотношения Между Некоторыми Сводимостями”, Алгебра и Логика, 33, № 6, 1994, 381-385.
4. В. Д. Соловъев, “Q-Сводимость и Гипергиперпростые Множества, Вероятн. Методы и киберн. ”, 10-11 (1974), 121-128.
5. Valentina S. Harizanov, “Effectively and Noneffectively Nowhere Symple Sets”, Math. Log. Quart. 42 (1996) 241-248.
6. D. Miller and J. B. Remmel, “Effectively Nowhere Symple Sets”, The Journal of Symbolic Logic, Volume 49, Number 1, march 1984.
7. Richard A. Sore, “Nowhere simple Sets and The Lattice of Recursively Enumerable Sets”, Journal of Symbolic Logic, Volume 43, Number 2, June 1984.