ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

ბექა თეზელიშვილი

ცვლადკოეფიციენტიანი ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა ოპერატორულ-საინტერპოლაციო მეთოდით

ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკის მეცნიერებათა მაგისტრის
აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: არჩილ პაპუკაშვილი,
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,
თსუ ასისტენტ-პროფესორი

თბილისი 2016

ცვლადკოეფიციენტიანი ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა ოპერატორულ-საინტერპოლაციო მეთოდით

აბსტრაქტი

ნაშრომში გამოწერილია ცვლადკოეფიციენტიანი ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის ახალი სათვლელი ალგორითმები. მოცემული სასაზღვრო ამოცანის გრინის ფუნქციას, განხილულს როგორც არაწრფივ ოპერატორს ცვლადი კოეფიციენტის მიმართ, ვუკეთებთ აპროქსიმაციას ნიუტონის ტიპის ოპერატორული საინტერპოლაციო პოლინომის გამოყენებით. შებრუნებული ოპერატორის აპროქსიმაციისთვის აგებულია სამი განსხვავებული ტიპის ფორმულები. პირობითად ამ ფორმულებს შეიძლება ვუწოდოთ პირდაპირი, მოდიფიცირებული და დისკრეტული. შესაბამისად ცვლადკოეფიციენტიანი ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისთვისგამოყენებული გვაქვს პირდაპირი, მოდიფიცირებული და დისკრეტული ოპერატორულ-საინტერპოლაციო მეთოდები. მოყვანილია მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აღწერა და ტესტური ამოცანების თვლის შედეგები ცხრილებისა და გრაფიკების სახით.

THE NUMERICAL SOLUTION OF A TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A NON-CONSTANT COEFFICIENT BY MEANS OF OPERATOR INTERPOLATION METHOD

Abstract

The new numerical algorithms for a two-point boundary value problem with a non-constant coefficient are proposed. The Green function of the given problem is represented as a nonlinear operator with respect to the coefficient. This operator is approximated by an operator interpolation polynomial of the Newton type. For the inverse operators approximate formulas of different types are derived. The numerical algorithms and results of calculation of tests problems are given.

სარჩევი

გვ

შესავალი

არაწრფივი სისტემების თეორიაში იდენტიფიკაციის ამოცანების ამოხსნისთვის გამოიყენება ფუნქციონალური მწკრივები და საინტერპოლაციო პოლინომები. ვ.მაკაროვისა და ვ.ხლობისტოვის შრომებში (იხ. მაგალითად [1], [2]) არაწრფივი ფუნქციონალებისათვის (ოპერატორებისათვის) აგებულია ნიუტონის ტიპის საინტერპოლაციო ფორმულა და მიღებულია ნაშთითი წევრის შეფასება. ეს მიდგომა დაფუძნებულია ფუნქციონალური (ოპერატორული) მრავალწევრების გულების განსაზღვრაში საინტერპოლაციო პირობებიდან „კონტინუალურ" კვანძებზე, რომლებიც წარმოადგენენ ჰევისაიდის ფუნქციების წრფივ კომბინაციას. ზემოაღნიშნულ შრომებს აქვთ თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა ოპერატორების აპროქსიმაციის თეორიის გამოყენებითი ტიპის ამოცანებში. საინტერპოლაციო მიახლოებების ელექტრონულ გამომთვლელ მანქანებზე (პერსონალურ კომპიუტერებზე) რეალიზაციის საკითხები ზემოაღნიშნულ ავტორებს არ განუხილავთ. ნაშრომებში [3], [4] ცვლადკოეფიციენტებიანი ელიფსური დიფერენციალური განტოლებების სასაზღვრო ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნისთვის გამოწერილია სათვლელი ალგორითმები, მოცემულია ტესტური ამოცანების თვლის შედეგები, რიცხვით-ექსპერიმენტალური გზით შესწავლილია კრებადობის საკითხები.

წარმოდგენილ ნაშრომში,ისევე როგორც ნაშრომში [3], განხილულია ნიუტონის ტიპის ოპერატორული საინტერპოლაციო პოლინომების გამოყენებით ცვლადკოეფიციენტიანი ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის საკითხები. ამასთან დიფერენციალური განტოლების (სასაზღვრო ამოცანის) გრინის ფუნქცია, როგორც არაწრფივი ოპერატორი ცვლადი კოეფიციენტის მიმართ, შეცვლილია ნიუტონის ტიპის ოპერატორული საინტერპოლაციო პოლინომით ცნობილი გულებით. ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის საპოვნელად აგებულია სხვადასხვა ტიპის მიახლოებითი ამოხსნის ფორმულები. მოცემულია მარიალიზირებელი ალგორითმის აღწერა და ტესტური ამოცანების თვლის შედეგები. რიცხვითი ექსპერიმენტების სერიიდან გამომჟღავნებულია კრებადობა m და n პარამეტრების მიმართ (m - ნიუტონის ტიპის ოპერატორული საინტერპოლაციო პოლინომის ხარისხი, n - კვანძების რიცხვი ინტეგრების შუალედის ქვეშუალედებად დაყოფისას).

თავი 1.

ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის შესახებ

§1. ამოცანის დასმა.

განვიხილოთ ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისთვის

$$\begin{cases} u''(x) - q(x)\,u(x) = -f(x)\,, & x \in [0,1]\,, \\ u(0) = u(1) = 0 & , \end{cases} \qquad (1.1)$$

$$q(x) \geq 0\,, \qquad q(x), f(x) \in L_2[0,1]\,.$$

(1.1)ამოცანას $W_{2,0}^2(0,1)$ სივრცეში აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც შეიძლება წარმოვადგინოთ გრინის ფუნქციის გამოყენებით შემდეგი სახით

$$u(x) = \int_0^1 G\big(x, \xi, q(.)\big)\; f(\xi)\, d\xi\,. \qquad (1.2)$$

აღნიშვნა $G\big(x, \xi, q(.)\big)$ გვიჩვენებს, რომ მოცემული სასაზღვრო ამოცანის $G(x, \xi)$ გრინის ფუნქცია დამოკიდებულია $q(x)$ ფუნქციაზე (ცვლად კოეფიციენტზე), ე.ი. გრინის ფუნქცია შეიძლება განვიხილოთ როგორც არაწრფივი ოპერატორი q -ს მიმართ

$$G \;:\; L_2^+[0,1] \;\to\; C\,([0,1]\,x\,[0,1])\,,$$

$$L_2^+[0,1] = \{q(x) : q(x) \in L_2[0,1]\,,\; q(x) \geq 0\,, \quad \forall\, x \in [0,1]\}\,.$$

ნაშრომში [2] მოცემული (1.1) ამოცანისათვის განხილულია ოპერატორული მწკრივების გამოყენებით მიახლოებითი ამოხსნის საკითხები. ნაჩვენებია, რომ ოპერატორი G ანალიზურია გატოს აზრით $q = 0$ წერტილში. თუ

$$M = \left\{q(x) : q(x) \in L_2^+[0,1]\,, \quad \|q(x)\|_{L_2[0,1]} \leq 4\right\},$$

მაშინ Mსიმრავლეზემწკრივი

$$G\big(x, \xi, q(.)\big) = G(x, \xi, 0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \int_0^1 \dots \int_0^1 \Big\{\prod_{j=1}^{i} G\big(z_{j-1}, z_j, 0\big)\,.\,q\big(z_j\big)\Big\} G(z_i, \xi, 0)\, dz_1 \dots dz_i\,, \qquad (1.3)$$

სადაც $z_0 = x$,

$$G(x, \xi, 0) = \begin{cases} x(1-\xi)\,, & 0 \leq x \leq \xi\,, \\ \xi(1-x)\,, & \xi \leq x \leq 1\,, \end{cases} \qquad (1.4)$$

თანაბრად კრებადია , ე.ი. გრინის ფუნქციას ნებისმიერი $q(.)$ - სთვის ვუახლოვდებით $q(.) = 0$ - ისთვის აგებული გრინის ფუნქციების გამოყენებით.

განვიხილოთ (1.1) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის ოპერატორულ-საინტერპოლაციო მიდგომა. (1.1) სასაზღვრო ამოცანის $G\big(x, \xi, q(.)\big)$ გრინის ფუნქცია შევცვალოთ m რიგის ნიუტონის ტიპის ოპერატორულ საინტერპოლაციო პოლინომით შემდეგი სახის

$$G_m\big(x, \xi, q(.)\big) = G(x, \xi, 0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 \dots \int_0^1 \Big\{K_i(x, \xi, z_1, \dots, z_i) \prod_{j=1}^{i} H\big(z_j - z_{j-1}\big) . \big[q\big(z_j\big) - h(j-1)\big]\Big\} \, dz_1 \dots \, dz_i, \qquad (1.5)$$

$$z_0 = 0.$$

უფრო მეტი თვალსაჩინოებისთვის ჩავწეროთ (1.5) ფორმულა შემდეგი ფორმით

$$G_m\big(x, \xi, q(.)\big) = G(x, \xi, 0) + \int_0^1 K_1(x, \xi, z_1) q(z_1) \, dz_1 +$$

$$+ \int_0^1 \int_{z_1}^1 K_2(x, \xi, z_1, z_2) \, q(z_1)[q(z_2) - h] dz_1 dz_2 +$$

$$+ \int_0^1 \int_{z_1}^1 \int_{z_2}^1 K_3(x, \xi, z_1, z_2, z_3) \, q(z_1)[q(z_2) - h][q(z_3) - 2h] dz_1 dz_2 dz_3 + \dots + \qquad (1.6)$$

$$+ \int_0^1 \int_{z_1}^1 \dots \int_{z_{m-1}}^1 K_m(x, \xi, z_1, z_2, \dots, z_m) q(z_1)[q(z_2) - h] \dots [q(z_m) - (m-1)h] dz_1 dz_2 \dots dz_m,$$

სადაც ოპერატორული გულები

$$K_i(x, \xi, z_1, \dots, z_i) = \frac{(-1)^i}{h^i} \frac{\partial^i}{\partial z_1 \dots \partial z_i} G(x, \xi, \zeta_i) , \qquad (1.7)$$

$$\zeta_i = h \sum_{j=1}^{i} H\big(. - z_j\big) , \ \ i = 1,2, \dots, m,$$

ჰევისაიდის ფუნქცია $H(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$

ინტერპოლაციის ბადის ბიჯი $h = \frac{(c_m - c_0)}{(m+1)}, \ 0 \le q(x) \le c, \ c_0 = \min\limits_{x \in [0,1]} q(x)$,

$$c_m = \max_{x \in [0,1]} q(x) , \qquad q(x) \in C_{[0,1]} .$$

(1.6) ფორმულაში შემავალი ოპერატორები $K_1, K_2, \dots$ გულები ავაგოთ ორი განსხვავებული გზით: 1. ნიუტონის ტიპის ოპერატორული საინტერპოლაციო პოლინომის აგება პირდაპირი მეთოდით, რომელშიც გამოვიყენებთ ზუსტი მეთოდით

აგებულ დამხმარე გრინის ფუნქციებს. 2. ნიუტონის ტიპის ოპერატორული საინტერპოლაციო პოლინომის აგების მოდიფიცირებული მეთოდი, რომელშიც გამოიყენება მიახლოებითი მეთოდით აგებული დამხმარე გრინის ფუნქციები.

§2. ფუნქციონალური ანალიზის ზოგიერთი ძირითადი ცნება.

§2.1.ფუნქციის ცნების შესახებ.

საზოგადოდ ფუნქციის ცნებაში შეიძლება ვიგულისხმოთ როგორც ჩვეულებრივი ფუნქცია, ასევე ფუნქციონალი და ოპერატორი. მოვიყვანოთ ფუნქციის მაგალითები.

1).წრფივი ფუნქცია y=kx+b;

2).წრფივი ფუნქციონალი y=$\int_{t_0}^{T} k(\tau)x(\tau)d\tau$;

3).წრფივი ოპერატორი y(t)=$\int_{t_0}^{t} k(\tau)x(\tau)d\tau$;

4).წრფივი უწყვეტი ოპერატორი y(t)=$\int_{t_0}^{T} k(t,\tau)x(\tau)d\tau,\ x(\tau)\epsilon C[t_0,T], k(t,\tau)\epsilon C_{t,\tau}$,$\boldsymbol{\tau}\epsilon[t_0,T]$.

5).$F_1[x(\tau)] = \int_a^b k_1(\tau)x(\tau)d\tau$ -I ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია;

$F_2[x(\tau)] = \int_a^b \int_a^b k_2(\tau_1,\tau_2)\, x(\tau_1)x(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$-II ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია და ა.შ.

……

$$F_n[x(\tau)] = \underbrace{\int_a^b \int_a^b \dots \dots .}_{n-ჯერ} \int_a^b k_n(\tau_1,\tau_2,\dots\tau_n)x(\tau_1)x(\tau_2)\dots .x(\tau_n)d\tau_1 d\tau_2 \dots .d\,\tau_n$$ –n ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია.

თუ n ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქციის გული სიმეტრიულია თავისი ცვლადების მიმართ, ე.ი მისი მნიშვნელობა არ იცვლება ცვლადების ნებისმიერი გადანაცვლებისას, მაშინ გვაქვს n ხარისხის რეგულარული ერთგვაროვანი ფუნქცია.

შენიშვნა1: თუ ფუნქცია რეგულარული არ არის მაინც შეგვიძლია რეგულარული გავხადოთ.

6).$G_n[x(\tau)] = F_0[x(\tau)] + F_1[x(\tau)] + \dots + F_n[x(\tau)] = \sum_{n\le N} F_n[x(\tau)],\ F_0[x(\tau)] = c_0 = const$

-N ხარისხის ფუნქციონალური პოლინომი(რეგულარული ფუნქცია).

შენიშვნა2: ასეთი პოლინომები გამოიყენება ფუნქციონალების აპროქსიმაციისას იმის ანალოგიურად, როგორც ჩვეულებრივი პოლინომები გამოიყენება ფუნქციის აპროქსიმაციისათვის.

§2.2. უწყვეტი ფუნქციონალების აროქსიმაციის საკითხები.

ა). როგორც ვიცით, ∀ უწყვეტ ფუნქციას შეიძლება მივუახლოვდეთ პოლინომებით. თეორემა უწყვეტი ფუნქციების აპროქსიმაციის შესახებ (ვაიერშტრასის თეორემა, 1885წ.):$\forall x(t)\epsilon C_{[a,b]}, \forall\varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon): n > n_0 => sup_{t\epsilon[a,b]}|x(t) - P_n(t)| = \rho(x, P_n) < \varepsilon,$

სადაც $P_n(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n$ რაციონალურ კოეფიციენტებიანი პოლინომია,$a_i\epsilon Q, i = 0,1, \dots, n.$

ბ)∀ უეყვეტი ფუნქციონალის აპროქსიმაცია შეიძლება რეგულარული ფუნქციონალური პოლინომებით. თეორემა უწყვეტი ფუნქციონალების აპროქსიმაციის შესახებ (ფრეშეს თეორემა 1910წ.):

თუ F[$x(\boldsymbol{\tau})$] ფუნქციონალი განსაზღვრული და უწყვეტია C[a,b] სივრცეში, მაშინ ნებისმიერი შემოსაზღვრულ ქვესიმრავლეზე R⊂C[a,b] ის შეიძლება წარმოვადგინოთ რეგულარული ფუნქციონალური პოლინომების მიმდევრიბის ზღვრის სახით

F[x(τ)]=$\lim\limits_{n\to\infty} G_{\tau_n}[x(\tau)]$,

$$F[x(\tau)]=\lim_{n\to\infty}\Big[h_0^{(n)} + \int_a^b h_1^{(n)}(\tau)x(\tau)d\tau + \int_a^b\int_a^b h_2^{(n)}(\tau_1,\tau_2)\,x(\tau_1)x(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + \cdots +$$
$$+ \int_a^b\dots\int_a^b h_{\tau_n}^{(n)}(\tau_1,\tau_2,\dots\tau_{\tau_n})x(\tau_1)x(\tau_2)\dots.x(\tau_{\tau_n})d\tau_1 d\tau_2\dots.d\tau_{\tau_n}\Big],$$

სადაც გულები $h_p^{(n)}(\tau_1,\tau_2,\dots\tau_p)$წარმოადგენენ F ფუნქციონალისთვის განსაზღვრულ რაიმე უწყვეტ ფუნქცებს და არ არიან დამოკიდებული x(τ) ფუნქციებზე, n არის ფუნქციონალური პოლინომის ხარისხი.

შენიშვნა3: ინდექსიτ_n = n არის τ_i ინტეგრების ცვლადების რაოდენობა, $i = 1,2,\dots,$n.

შენიშვნა4: თუ F[$x(\tau)$] ფუნქციონალი განიხილება C[a,b] სივრცის კომპაქტურ ქვესიმრავლეზე, მაშინ ადგილი აქვს რეგულარული პოლინომების მიმდევრიბის თანაბარ კრებადობას.

უფრო ზოგად შემღხვევაში, როცა ფუნქციონალი დამოკიდებულია t პარამეტრზე, აპროქსიმაცია $[t_0,T]$ მონაკვეთზე ხდება შემდეგი სახის რეგულარული პოლინომებით

$$y(t)=F[x(\tau),t]=\lim_{n\to\infty}\Big[h_0^{(n)}(t) + \int_{t_0}^T h_1^{(n)}(t,\tau)x(\tau)d\tau + \int_{t_0}^T\int_{t_0}^T h_2^{(n)}(t,\tau_1,\tau_2)\,x(\tau_1)x(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 +$$
$$+ \ \dots + \int_{t_0}^T\dots\int_{t_0}^T h_{\tau_n}^{(n)}(t,\tau_1,\tau_2,\dots\tau_n)x(\tau_1)x(\tau_2)\dots.x(\tau_n)d\tau_1 d\tau_2\dots.d\tau_n\Big].$$

კერძოდ, თუ F[$x(\tau)$,t] ფუნქციონალი წრფივია, მაშინ მივიღებთ ადამარის ფორმულას ∀ უწყვეტი წრფივი ფუნქციისათვის C[t_0,T] სივრცეში

$$F[x(\tau),t]=\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^T h_1^{(n)}(t,\tau)x(\tau)d\tau.$$

$$F[x(\tau),t]=\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^T h_1^{(n)}(t,\tau)x(\tau)d\tau = \int_{t_0}^T[\lim_{n\to\infty}h_1^{(n)}(t,\tau)\,]\,x(\tau)d\tau = \int_{t_0}^T h_1(t,\tau)x(\tau)d\tau.$$ და ა.შ.

შენიშვნა5: ფიქსირებული t-სთვის ერთეულოვანი ფუნქციონალის Ix(t)=x(t)შემთხვევაში გვაქვს--ფრეშეს წარმოდგენა: I x(t)=$\int_{t_0}^{T} \delta(t-\tau)x(\tau)d\tau$.

არაწრფივი დინამიური სისტემების (მათემატიკური მოდელების) აღწერისთვის (არაწრფივი ოპერატორების აპროქსიმაციისთვის) გამოიყენება ვოლტერას პოლინომები,რომლებიც შედგებიან რეგულარული ერთგვაროვანი ფუნქციონალებისაგან t ϵ $[t_0, T]$ პარამეტრზე დამოკიდებული(t დროის მიმდინარე მომენტი):

$$v_n[x(\tau), t] = \int_{t_0}^{T} \dots \int_{t_0}^{T} k_n(t, \tau_1, \tau_2, \dots \tau_n)x(\tau_1)x(\tau_2) \dots . x(\tau_n)d\tau_1 d\tau_2 \dots . d\tau_n,$$

სადაც $k_n(t, \tau_1, \tau_2, \dots \tau_n)$გულები სიმეტრიულია$\tau_1, \tau_2, \dots \tau_n$ცვლადების მიმართ $\forall t\epsilon[t_0, T]$-სთვის(რეგულარობის პირობა). ამასთან იგულისხმება შემდეგი პირობის შესრულება:$k_n(\tau_1, \tau_2, \dots \tau_n) \equiv 0$,როცა$\tau_i > t,\ i = 1,2, \dots \dots n$.

თუ ეს პირობები სრულდება, მაშინ შემდეგ ჯამს $G_N[x(\tau), t] = \sum_{n=0}^{N} v_n[x(\tau), t]$ ეწოდება ვოლტერას პოლინომი(ოპერატორი).

§2.3.დიფერენცირება ნორმირებულ სივრცეში.

ფუნქცია f(x): X -> Y, X,Y-ნორმირებული სივრცეებია, განსაზღვრის არე M⊂X ღია სიმრავლე. $\forall x\epsilon M \subset X\ \wedge$ არგუმენტისნაზრდი$\delta x\epsilon$X : x+$\delta x\epsilon M$: ფუნქციის ნაზრდი δf(x)=f(x+δ x)-f(x).

f(x) ფუნქცია ფრეშეს აზრით დიფერენცირებადია, თუ ∃ შემოსაზღვრული წრფივი ოპერატორი $f'(x): X \to Y$ ისეთი,რომ $\delta f(x) = f'(x)\delta x + \alpha(x, \delta x)$, სადაც ნაშთითი წევრისთვის გვაქვს $\frac{\|\alpha(x,\delta x)\|}{\|\delta x\|} \to 0$,როცა $\|\delta x\| \to 0$.

$f'(x)\delta x$ ეწოდება ძლიერი დიფერენციალი(ფრეშეს დიფერენციალი) f(x) ფუნქციის,ხოლო $f'(x)$-ს კი ძლიერი წარმოებული(ფრეშეს წარმოებული) f(x) ფუნქციისა xწერტილში.

შენიშვნა6: ფრეშეს წარმოებულის განმარტება არ გვაძლევს მისი გამოთვლის საშულებას.

ავიღოთ δ x=γh, hϵX, γ −ნამდვილი პარამეტრი.

γ->0=>$\|\delta x\| \to 0 => \alpha(x, \delta x) \to 0. \delta f = f(x + \gamma h) - f(x) = f'(x)\gamma h + \alpha(x, \gamma h)$.

$$\lim_{\gamma \to 0} \frac{f(x + \gamma h) - f(x)}{\gamma} = f'(x)h + \lim_{\gamma \to 0} \frac{\alpha(x, \gamma h)}{\gamma} = f'(x)h.$$

შენიშვნა7: ზღვარი გაგებულია როგორც ნორმით კრებადობა.

df=$\lim_{\gamma \to 0} \frac{\delta f(x)}{\gamma} = \lim_{\gamma \to 0} \frac{f(x+\gamma h)-f(x)}{\gamma} = \frac{d}{d\gamma} f(x + \gamma h)|_{\gamma=0}$-სუსტი დიფერენციალი(გატოს დიფერენციალი)f(x) ფუნქციისა x წერტილში. თუ ∃წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორი

$f'(x)$: $df = f'(x)h => f'(x)$ -ს ეწოდება f(x) ფუნქციის სუსტი წარმოებული (გატოს წარმოებული).

შენიშვნა7: თუ ფუნქციას აქვს ძლიერი წარმოებული, მაშინ მას აქვს სუსტიც, ამასთან ორივე წარმოებული ემთხვევა ერთმანეთს. შებრუნებული მტკიცება ზოგადად არ არის სწორი. მაგრამ, თუ სუსტი წარმოებული $f'(x)$ არსებობს x წერტილის რაიმე მიდამოში და უწყვეტია x წერტილში, მაშინ ამ წერტილში არსებობს ძლიერი წარმოებულიც, რომელიც ემთხვევა სუსტს.

შენიშვნა8: $X \equiv E^1$, $h \equiv 1 =>$ გვექნება f(x) ფუნქციის ჩვეულებრივი წარმოებული.

ანალოგიურად განისაზღვრება მაღალი რიგის დიფერენციალები და წარმოებულები.

მეორე რიგის ძლიერი დიფიფერენციალი (მეორე რიგის ძლიერი წარმოებული განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით δf(x)=$f'(x)\delta x + \frac{1}{2}f''(x)[\delta x]^2 + \alpha(x,\delta x)$,

$$\frac{\|\alpha(x,\delta x)\|}{\|\delta x\|^2} \to 0, \qquad \|\delta x\| \to 0.$$

და ა.შ n რიგის ძლიერი დიფიფერენციალი (n რიგის ძლიერი წარმოებული)

δf (x)=$f'(x)\delta x + \frac{1}{2}f''(x)[\delta x]^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)[\delta x]^n + \alpha(x,\delta x)$, $\frac{\|\alpha(x,\delta x)\|}{\|\delta x\|^n} \to 0$, $\|\delta x\| \to 0$.

ეს ფორმულა არის ანალოგი ნამდვილი ცვლადის ფუნქციის ტეილორის ფორმულის.

$d^n f(x) = \frac{d}{d\gamma}[\ldots\left[\frac{d}{d\gamma}f\ (x+\gamma h)\right]\ldots]_{\gamma=0} = \frac{d^n}{d\gamma^n}f\ (x+\gamma h)|_{\gamma=0}$ – nრიგისგატოს დიფერენციალი.

n რიგის ერთგვაროვანი შემოსაზღვრული ოპერატორი $d^n f(x) = f^{(n)}(x)h^n$,

სადაც $f^{(n)}(x)$არის $f(x)$ ფუნქციის n რიგის სუსტი(გატოს) წარმოებული.

f(x+γh)=f(x)+$\gamma f'(x)h + \frac{\gamma^2}{2}f''(x)h^2 + .. + \frac{\gamma^n}{n!}f^{(n)}(x)h^n + \alpha(x,\gamma h)$, $\frac{\alpha(x,\gamma h)}{\gamma} \to 0, \gamma \to 0$.

f(x) ფუნქციას ეწოდება ანალიზური ფრეშეს აზრით x წერტილში, თუ მისი δf(x) ნაზრდი შეიძლება წარმოვადგინოთ ტეილორის თანაბრად კრებადი მწკრივის სახით

δf(x)=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(\delta x)^n$.

თუ არსებობს შემოსაზღვრული$f^{(n)}(x)h^n$ ოპერატორები $\forall n$ ხარისხისთვის და x წერტილის რაიმე მიდამოში თანაბრად კრებადია მწკრივი(ტეილორის მწკრივი ჩაწერილი გატოს წარმოებულებისათვის)

f(x+ γh)-f(x)=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma^n}{n!}f^{(n)}(x)h^n$,

მაშინ ფუნქციას ეწოდება ანალიზური გატოს აზრით x წერტილში.

§2.4.ზოგიერთი მაგალითი.

მაგალითი(1).

წრფივი ოპერატორიy(t)= $\int_{t_0}^{T} k(t,\tau)x(\tau)d\tau$,სადაც გული $k(t,\tau) \epsilon C([t_0,T] \times [t_0,T])$,ე.ი. უწყვეტი ფუნქციაა $t,\tau\epsilon[t_0,T]$ ცვლადების.მოცემული წრფივი ოპერატორის გატოს დიფერენციალისთვის გვექნება

$$df(x) = \frac{d}{d\gamma}\int_{t_0}^{T} k(t,\tau)[x(\tau)+\gamma h(\tau)]d\tau|_{\gamma=0} = \lim_{\gamma\to 0}\frac{\int_{t_0}^{T} k(t,\tau)[x(\tau)+\gamma h(\tau)]d\tau - \int_{t_0}^{T} k(t,\tau)x(\tau)d\tau}{\gamma} =$$

$= \lim_{\gamma\to 0}\frac{\int_{t_0}^{T} k(t,\tau)\gamma h(\tau)d\tau}{\gamma} = \int_{t_0}^{T} k(t,\tau)\,h(\tau)d\tau$წრფივი ოპერატორი.გატოს წარმოებული$f'(x) * h = \int_{t_0}^{T} k(t,\tau)h(\tau)d\tau$ფრეშეს წარმოებულიცაა, რადგან უწყვეტი ოპერატორია.

მაგალითი(2).

არაწრფივი ოპერატორი(ურისონის ოპერატორი)

y=f(x)= $\int_{t_0}^{T} k(t,\tau,x(\tau))d\tau$, $x(\tau)\epsilon C[t_0,T]$,ფუნქცია $k(t,\tau,x)$ უწყვეტია $t,\tau\epsilon[t_0,T]$ ცვლადების მიმართ და დიფერენცირებადია x-ით =>

$df(x)=f'(x)h = \frac{d}{d\gamma}\int_{t_0}^{T} k(t,\tau,x(\tau)+\gamma h(\tau))d\tau|_{\gamma=0}=\int_{t_0}^{T} k_x\big(t,\tau,x(\tau)\big)h(\tau)d\tau$, $k_x\big(t,\tau,x(\tau)\big)=\frac{\partial}{\partial x}k(t,\tau,x)$.

xცვლადის მიმართ ოპერატორული გულის ნაზრდი

$k(t,\tau,x(\tau)+\gamma h(\tau)) - k(t,\tau,x(\tau)) = \frac{\gamma h(\tau)}{1!}k'_x(t,\tau,x) + \frac{\gamma^2 h^2(\tau)}{2!}k''_x(t,\tau,x) + \cdots$;

თუ $k(t,\tau,x)\epsilon C_x^2$, მაშინ$\frac{d}{d\gamma}[\int_{t_0}^{T} k_x\big(t,\tau,x(\tau)+\gamma h_1(\tau)\big)h(\tau)d\tau]_{\gamma=0} = \int_{t_0}^{T} k_{xx}\big(t,\tau,x(\tau)\big)h_1(\tau)h(\tau)d\tau$,

სადაც

$$h_1(\tau), h(\tau)\epsilon X,\ k_{xx}\big(t,\tau,x(\tau)\big)=\frac{\partial}{\partial x}k_x(t,\tau,x).$$

ავიღოთ$h_1(\tau) = h(\tau)$ =>მეორე წარმოებული (კვადრატული ოპერატორი)

$$d^2 f(x) = f''(x)h^2 = \int_{t_0}^{T} k_{xx}\big(t,\tau,x(\tau)\big)h^2(\tau)d\tau.$$

მაგალითი(3).

მეორე ხარისხის ერთგვაროვანი რეგურალური ფუნქციონალი

$F_2[x(\tau),t] = \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} k(t,\tau_1,\tau_2)\,x(\tau_1)x(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$, სადაც $t,\tau_1,\tau_2\ \epsilon[t_0,T]$.

გატოს წარმოებული

$dF_2[x(\tau),t] = \frac{d}{d\gamma}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} k(t,\tau_1,\tau_2)\,[x(\tau_1)+\gamma h(\tau_1)][x(\tau_2)+\gamma h(\tau_2)]d\tau_1 d\tau_2|_{\gamma=0}$=

$$\lim_{\gamma\to 0}\frac{\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}k(t,\tau_1,\tau_2)\,[x(\tau_1)+\gamma h(\tau_1)][x(\tau_2)+\gamma h(,\tau_2)]d\tau_1 d\tau_2-\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}k(t,\tau_1,\tau_2)\,x(\tau_1)x(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\gamma}$$

=…= $\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}k(t,\tau_1,\tau_2)\,x(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}k(t,\tau_1,\tau_2)\,x(\tau_2)h(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2$=

$$=\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}[k(t,\tau_1,\tau_2)+k(t,\tau_2,\tau_1)]\,x(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2=$$

$$=\int_{t_0}^{T}[\int_{t_0}^{T}[k(t,\tau_1,\tau_2)+k(t,\tau_2,\tau_1)]\,x(\tau_1)d\tau_1]h(\tau_2)d\tau_2$$

$F_2[x(\tau),t]$ რეგულარულია ($k(t,\tau_1,\tau_2)$=$k(t,\tau_2,\tau_1)$) => გატოს წარმოებული

$F_2'[x(\tau),t]h=\int_{t_0}^{T}\Phi_2\,[x(\tau),t]h(\tau)d\tau$, სადაც $\Phi_2[x(\tau),t]=2\int_{t_0}^{T}k(t,\tau_1,\tau)\,x(\tau_1)d\tau_1$.

შენიშვნა8: საზოგადად, განმარტებით f(x)=F$[x(\tau),t]$ ოპერატორის წარმოებული არის შემოსაზღვრული წრფივი ოპერატორი, ამიტომ C$[t_0,T]$. სივრცეში ადამარის ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ $F'[x(\tau),t]h=\int_{t_0}^{T}\Phi_1\,(t,\tau,x)h(\tau)d\tau$, სადაც $\Phi_1(t,\tau,x)$ გული შეიძლება იყვეს განზოგადებული ფუნქცია და ზოგად შემთხვევაში დამოკიდებულია xϵC$[t_0,T]$ წერტილზე, რომელშიც ითვლება წარმოებული.

ფრეშეს ფორმულის გამოყენებით

$$F''[x(\tau),t]h^2=\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\Phi_2[t,\tau_1,\tau_2,x]\,h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2,$$

სადაც $\Phi_2[t,\tau_1,\tau_2,x]$ გული, ზოგად შემთხვევაში $x(\tau)-$ზე დამოკიდებული,

სიმეტრიულიაτ_1,τ_2ცვლადებისმიმართ. =>

$d^2f(x)=F_2''[x(\tau),t]h^2=2\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}k(t,\tau_1,\tau)\,h(\tau_1)h(\tau)d\tau_1 d\tau$.

მაგალითი(4).

განვიხილოთ ოპერატორი f(x)= F$[x(\tau),t]$,tϵC$[t_0,T]$, f: C$[t_0,T]\to$ C$[t_0,T]$,

f იყოს n-ჯერ დიფერენცირებადიx -ის მიმართ. =>

ოპერატორი $F^{(n)}(x)h^n$ ფრეშეს ფორმულის გამოყენებით შეიძლება ჩავწეროთ n რიგის ერთვაროვანი რეგულარული ოპერატორის სახით

$F^{(n)}[x(\tau),t]h^n=\int_{t_0}^{T}\dots\int_{t_0}^{T}\Phi_n[t,\tau_1,\dots\dots\tau_n,x]\,h(\tau_1)\dots\dots h(\tau_n)d\tau_1\dots\dots d\tau_n$,

სადაც $\Phi_n[t,\tau_1,\dots\dots\tau_n,x]$ გული სიმეტრიულია $\tau_1,\dots\dots\tau_n$ ცვლადების მიმართ.

მაგალითი(4). n რიგის რეგულარული ოპერატორული პოლინომი (ტეილორის ფორმულა ოპერატორისთვის)

$$F[x(\tau)+\gamma h(\tau),t]-F[x(\tau)]=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma^k}{k!}\int_{t_0}^{T}\dots\int_{t_0}^{T}\Phi_k[t,\tau_1\dots\dots\tau_k,x]\,h(\tau_1)\dots\dots h(\tau_k)d\tau_1\dots\dots d\tau_k+\alpha(x,\gamma h).\quad(2.1)$$

F$[x(\tau),t]$ ანალიზურია გატოს აზრით, თუ $x(\tau),\tau\epsilon[t_0,T]$ წერტილის მიდამოში წარმოიდგინება ხარისხოვან მწკრივად

$$F[x(\tau)+\gamma h(\tau),t]=F[x(\tau)]+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma^n}{n!}\int_{t_0}^{T}\dots\int_{t_0}^{T}\Phi_n[t,\tau_1\dots\tau_n,x]\,h(\tau_1)\dots h(\tau_n)d\tau_1\dots d\tau_n.\quad(2.2)$$

შენიშვნა9: ეს ფორმულა სამართლიანია ფრეშეს აზრით ანალიზური ოპერატორისთვის,თუ შესრულებულია პრობები, რომელთა დროსაც ძლიერი დიფერენციალი ემთხვევას სუსტს.

თუ $\Phi_n[t,\tau_1,\dots\dots\tau_n,x]$=0 ერთი მაინც τ_i>t-სთვის, i=1,2,…..,n მაშინ (2.2) მწკრივს ეწოდება ვოლტერას მწკრივი.

კერძოდ ვოლტერას პოლინომი

$$G_N[x(\tau),t]=\sum_{n=0}^{N}\int_{t_0}^{T}\dots\int_{t_0}^{T}k_n(t,\tau_1\dots\tau_n,x)\,h(\tau_1)\dots h(\tau_n)d\tau_1\dots d\tau_n\,,t\epsilon[t_0,T],\quad(2.3)$$

განსაზღვრავს მთელ სივრცეში ანალიზურ ოპერატორს.

$$G_N{}^{(n)}[x(\tau),t]h^n=n!\int_{t_0}^{T}\dots\int_{t_0}^{T}k_n(t,\tau_1\dots\tau_n,x)\,h(\tau_1)\dots h(\tau_n)d\tau_1\dots d\tau_n,\text{n=1,2,…,N.}$$

$x\equiv 0$ წერტილის მიდამოში მიღებული (2.2)მწკრივიემთხვევა (2.3) გამოსახულებას, ე.ი $G_N[x(\tau),t]$ პოლინომისთვის (2.1) ფორმულა (ტეილორის ფორმულა) არის ზუსტი, როცა n=N.

§3.წრფივი დიფერენციალური ოპერატორების გრინის ფუნქცია და შებრუნებული ოპერატორის აგება გრინის ფუნქციის გამოყენებით.

§3.1.წრფივი დიფერენციალური ოპერატორის გრინის ფუნქციის შესახებ.

ვთქვათ მოცემულია განტოლება Ly=f ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით, სადაც L წრფივი დიფერენციალური ოპერატორია. დაუშვათ $\exists\, L^{-1}$შებრუნებილი ოპერატორი, რომლის განსაზღვრის არე ემთხვევა L ოპერატორის მნიშვნელობათა არეს: $L^{-1}(Ly)=y,\forall y\in D_L$.

ჩვენი ამოცანაა ვიპოვოთ ცხადი სახე L^{-1}ოპერატორის.

L^{-1} არის ინტეგრალური ოპერატორი უწყვეტი G(x,ξ) გულით,რომელსაც ეწოდება გრინის ფუნქცია L ოპერატორის.

შენიშვნა10: როცა გვაქვს პირველი რიგის (n =1) დიფერენციალური განტოლება, მაშინ გრინის ფუნქცია წყვეტადია,x= ξწერტილში აქვს ნახტომი.

თუ $Ly=0$ სასაზღვრო ამოცანას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, მაშინ L ოპერატორს აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი გრინის ფუნქცია.

ვთქვათ მოცემული გვაქვს მეორე რიგის (n=2) დიფერენციალური განტოლება $Ly=f$.

სრულდება ერთადერთობის პირობა $Ly=0 \Rightarrow y\equiv 0$.

L ოპერატორის გრინის ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1.$G(x,\xi)\in C_x$ $\forall\, x,\xi \in [a,b]$;

2. $G(x,\xi)\in C_x^{(2)}$ $\forall$ ფიქსირებული $\xi \in [a,b]$,$x \in [a,\xi) \cup (\xi,b]$, ანუ $G_x'(x,\xi),\ G_x''(x,\xi) \in C_x$,

$G_x'(x,\xi)$ ფუნქციას $x=\xi$ წერტილში აქვს ნახტომი =1, ანუ $G_x'(\xi+0,\xi) - G'(\xi-0,\xi) = 1$;

3.გრინის ფუნქცია აკმაყოფილებს ერთგვაროვან განტოლებას ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით $x \in [a,\xi) \cup (\xi,b]$, $\forall$ ფიქსირებული$\xi \in [a,b]$.

შენიშვნა11: $lim_{\varepsilon\to 0}[G_x'(\xi+\varepsilon,\xi) - G'(\xi-\varepsilon,\xi)] = 1,\ \varepsilon > 0.$

§3.2. გრინის ფუნქციის აგება.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევაში გრინის ფუნქციის აგების რამდენიმე განსხვავებული გზა.

I გზა: იხილეთ [5].

$$\begin{cases} -y''(x) = f(x), \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases}$$

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi,$$

$$G(x,\xi)=\begin{cases} a_1y_1(x) + a_2y_2(x), 0 \le\ x < \xi, \\ b_1y_1(x) + b_2y_2(x), \xi \le x < 1, \end{cases}$$

სადაც $y_1(x),\ y_2(x)$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია$y''(x) = 0$ განტოლების,ხოლოa_1 ,a_2,b_1,b_2 const-ები არ არიან ξ- ზედამოკიდებული.

როგორც ვიცით, ა). გრინის ფუნქცია $G(x,\xi)$ უწყვეტია$\forall x,\xi \in [0,1]$, ხოლო

$G_x'(x,\xi)$წყვეტილია(ნახტომით -1)$x=\xi$ წერტილიში, დაბ). $G(0,\xi)=G(1,\xi)=0$.

ა). $\begin{cases} b_1y_1(\xi) + b_2y_2(\xi) = a_1y_1(\xi) + a_2y_2(\xi), \\ b_1y_1'(\xi) + b_2y_2'(\xi) - a_1y_1'(\xi) - a_2y_2'(\xi) = \ -1; \end{cases}$ ბ)$\begin{cases} G(0,\xi) = 0; \\ G(1,\xi) = 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} (b_1-a_1)y_1(\xi) + (b_2-a_2)y_2(\xi) = 0, \\ (b_1-a_1)y_1'(\xi) + (b_2-a_2)y_2'(\xi) = -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1y_1(0) + a_2y_2(0) = 0; \\ b_1y_1(1) + b_2y_2(1) = 0; \end{cases}$$

$$b_1 - a_1 \equiv c_1,\ \ b_2 - a_2 \equiv c_2 \Rightarrow \begin{cases} c_1y_1(\xi) + c_2y_2(\xi) = 0, \\ c_1y_1'(\xi) + c_2y_2'(\xi) = -1, \end{cases}$$

$\Delta = det = \begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) \end{vmatrix} \neq 0$;(რადგანაც ვრონსკის დეტერმინანტია);

$$c_1 = \frac{\Delta c_1}{\Delta}, \qquad c_2 = \frac{\Delta c_2}{\Delta};$$

$y_1(x) = 1, y_2(x) = x \;=>\; \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \Delta c_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(\xi) \\ -1 & y_2'(\xi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \xi \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \xi,$

$\Delta c_2 = \begin{vmatrix} y_1(\xi) & 0 \\ y_1'(\xi) & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad => c_1 = \xi,\; c_2 = -1;$

$b_1 - a_1 \equiv c_1,\; b_2 - a_2 \equiv c_2$ =>რადგანაც$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x =>$

$$\begin{cases} a_1 * 1 + a_2 * 0 = 0, \\ b_1 * 1 + b_2 * 1 = 0, \end{cases} \text{და} \begin{cases} b_1 - a_1 = \xi, \\ b_2 - a_2 = -1; \end{cases}$$

$$a_1 = 0 => b_1 = \xi => b_2 = -\xi => a_2 = -\xi + 1$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} (1-\xi)x, 0 \le x < \xi, \\ \xi(1-x), \xi < x \le 1; \end{cases}$$

II გზა: იხილეთ [7].

$$\begin{cases} -y''(x) = 0, \\ y(0) = y(1) = 0; \end{cases}$$

$G(x,\xi) = c_1(\xi)\varphi_1(x) + c_2(\xi)\varphi_2(x) + g(x,\xi)$ ასეთი სახით ვეძებთ, სადაც

$$\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x,$$

$g(x,\xi) = \text{sign}(x - \xi) * \frac{1*\xi - 1*x}{(2-1)*(1-0)} = sign(x-\xi) * \frac{\xi - x}{2} = \begin{cases} \frac{x-\xi}{2}, x < \xi, \\ \frac{\xi - x}{2}, x > \xi; \end{cases}$

$G(0,\xi) = G(1,\xi) = 0,$

$G(0,\xi) = c_1(\xi) * 1 + c_2(\xi) * 0 + \frac{0-\xi}{2} = 0 => c_1(\xi) = \frac{\xi}{2};$

$G(1,\xi) = c_1(\xi) * 1 + c_2(\xi) * 1 + \frac{\xi-1}{2} = 0 => \frac{\xi}{2} + c_2(\xi) + \frac{\xi-1}{2} = 0 =>$

$$c_2(\xi) = -\frac{\xi}{2} - \frac{\xi-1}{2} = -\frac{2\xi-1}{2} = \frac{1-2\xi}{2} =>$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{\xi}{2} + \frac{1-2\xi}{2} * x + \frac{x-\xi}{2} = \frac{\xi + x - 2\xi x + x - \xi}{2} = \frac{2x - 2\xi x}{2} = x(1-\xi), x < \xi, \\ \frac{\xi}{2} + \frac{1-2\xi}{2} * x + \frac{\xi - x}{2} = \frac{\xi + x - 2\xi x + \xi - x}{2} = \frac{2\xi - 2\xi x}{2} = \xi(1-x), x > \xi, \end{cases}$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi), x < \xi, \\ \xi(1-x), x > \xi; \end{cases}$$

III გზა: იხილეთ [8].

$$\begin{cases} -y''(x) = f, \\ y(0) = y(1) = 0; \end{cases} Y = \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi) d\xi.$$

$$\begin{cases} -G_x''(x,\xi) = \delta(x-\xi), \\ G(0,\xi) = 0, \\ G(1,\xi) = 0; \end{cases}$$

1)$0 \le x < \xi (x \in [0,\xi))$=> $\begin{cases} y''(x) = 0, \\ y(0) = 0, \quad => \\ y(x)|_{\xi-} =? \end{cases}$

y(x)=$c_1 + c_2 x$,

y(0)=$c_1 + c_2 * 0 = c_1 = 0 => c_1 = 0; c_2 =?$

2) x=ξ $\quad => \int_{\xi-}^{\xi+} y''(x)dx = -\int_{\xi-}^{\xi+} \delta(x-\xi)dx => y'(x)|_{\xi+} - y'(x)|_{\xi-} = -1$

3)$\xi < x \le 1$ (x$\in (\xi, 1]$) => $\begin{cases} y''(x) = 0, \\ y(x)|_{\xi+} =?, \quad => \\ y(1) = 0; \end{cases}$

$$y(x) = c_3 + c_4 x, \qquad y(1) = c_3 + c_4 * 1 = c_3 + c_4 = 0 => c_3 =?, c_4 =?$$

გამოვიყენოთ, რომ წარმოებულს აქცს წყვეტა ნახტომით -1, ხოლო თავად ფუნქცია რომ უწყვეტიაx= ξ წერტილში=> $y'(x)|_{\xi+} - y'(x)|_{\xi-} = -1; y(x)|_{\xi+} = y(x)|_{\xi-}$;

$$\begin{cases} c_4 - c_2 = -1 \\ c_1 + c_2\xi = c_3 + c_4\xi \end{cases} => c_1 = 0; c_2 =?;\ c_3 + c_4 = 0; c_3 = -c_4 =?$$

$c_3 = c_2\xi - c_4\xi = (c_2 - c_4)\xi = -(c_4 - c_2) = \xi \ => c_4 = -c_3 = -\xi;$

$c_2 = c_4 + 1 = -\xi + 1 = 1 - \xi$ => 1)$y(x) = c_1 + c_2 x = x(1-\xi)$, როცა $x < \xi$,

2)y(x)=$c_3 + c_4 x$= ξ+(- ξ) x= ξ(1- x), როცა $x > \xi$;

G(x, ξ)=$\begin{cases} x(1-\xi), x < \xi, \\ \xi(1-x), x > \xi; \end{cases}$

IV გზა: ბოლოს მივიყვანოთ პროფ. ვ.მაკაროვის მიერ გრინის ფუნქციის აგების გზა.

$$\begin{cases} -u''(x) = 0, \\ u(0) = u(1) = 0; \end{cases}$$

u(x)=$\begin{cases} ax, 0 \le x \le \xi, \\ b(1-x), \xi \le x \le 1 \end{cases}$ => $\begin{cases} a\xi = b(1-\xi), \\ -b - a = -1; \end{cases}$ => $a = 1 - b => (1-b)\xi = b(1-\xi) =>$

$$\xi - b\xi = b - b\xi \ => \quad b = \xi \ => \ a = 1 - \xi \ =>$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi), x < \xi, \\ \xi(1-x), x > \xi; \end{cases}$$

§3.3. ზოგიერთი შენიშვნები გრინის ფუნქციის, ასევე ჰევისაიდისა და დირაკის ფუნქციების შესახებ.

ა).გრინის ფუნქციის შესახებ.

$\begin{cases} y'' = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანა (დირიხლეს ამოცანა);

$G(x,\xi)=\begin{cases} x(1-\xi), x\le\xi, \\ \xi(1-x), x\ge\xi; \end{cases}$

$G(\xi,\xi)=\xi(1-\xi)=\xi-\xi^2$

$G'(\xi,\xi)=1-2\xi=0 \Rightarrow \xi=\frac{1}{2}$;

Max $G(\xi,\xi)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$;

$$0\le x\le\xi \Rightarrow G(x,\xi)=x(1-\xi)\le\xi(1-\xi)\le\frac{1}{4};$$

$\xi\le x\le 1 \Rightarrow G(x,\xi)=\xi(1-x)\le\xi(1-\xi)\le\frac{1}{4}; \Rightarrow \|G(x,\xi)\|\le\frac{1}{4}.$

შეიძლება განვიხილოთ სხვადასხვა სასაზღვრო ამოცანები, მაგალითად შემდეგი სახის შერეული სასაზღვრო ამოცანა:

$$\begin{cases} -y''=0, \\ y(0)=y'(1)=0, \end{cases}$$

მის გრინის ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$G(x,\xi)=\begin{cases} x, \ x\le\xi, \\ \xi, \ x\ge\xi; \end{cases}$

ასევე საინტერესოა განვიხილოთ მაგალითად კოშის ამოცანა:

$$\begin{cases} -y''=0, \\ y(0)=y'(0)=0, \end{cases}$$

შესაბამის კოშის ფუნქციას აქვს სახე: $K(x,\xi)=\begin{cases} \xi-x, x\le\xi, \\ 0, \ x\ge\xi; \end{cases}$ და სხვა.

ბ).ჰევისაიდისა და დირაკის ფუნქციების შესახებ

$e(x)=H(x)=\begin{cases} 1, x>0, \\ 0, x<0; \end{cases}$

$e(x)$ წყვეტადი ფუნქციაა , x=0 წერტილში აქვს ნახტომი.

$e(x)=H(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(x)dx$, $\qquad e'(x)=\delta(x)$,

დირაკის ფუნქცია $\delta(x)=\begin{cases} 0, \ x\ne 0, \\ \infty, \ x=0, \end{cases} \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1.$

$signx=\frac{x}{|x|}=\begin{cases} -1, x<0, \\ 1, x>0; \end{cases} signx=2e(x)-1; |x|'=signx;$

$\int_{-\infty}^{x}e(x)dx=\frac{x+|x|}{2}=\begin{cases} 0, x<0 \\ x, x>0 \end{cases}$ ინტეგრალი $e(x)$-დან უწყვეტი ფუნქციაა.

$|x|''=(signx)'=2\delta(x).$

§3.4.დიფერენციალური ოპერატორის შებრუნება გრინის ფუნქციის გამოყენებით

თუ Ly=0 განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, მაშინ $\forall f(x)\epsilon C[a,b]$ არსებობს Ly=f განტოლების ამონახსნი. ეს ამონახსნი მოიცემა ფორმულით y(x)=$\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$, სადაც G(x,**ξ**)-გრინის ფუნქციაა L ოპერატორის .

§4.ოპერატორული მწკრივების და საინტერპოლაციო პოლინომების გულების აგების შესახებ

დაუშვათ ოპერატორი $F\big(t,x(\tau)\big)$, $t\epsilon[0,T]$ განსაზღვრული და უწყვეტია x -ის მიმართ $C[0,T]$. მაშინ, ვაიერშტრასის თეორემია ანალოგიურად, ცნობილია ფრეშეს თეორემა F ოპერატორის წარმოდგენისა რეგულარული ოპერატორული პოლინომების ზღვრის სახით. გულების შეფასების ცნობილი მეთოდები საფეხუროვანი ან δ -ფუნქციების გამოყენებით (იხ. მაგ.ალითად [6]), ზოგად შემთხვევაში აწყდებიან რიგ სერიოზულ სირთლეებს. შევჩერდებით ამაზე უფრო დაწვრილებით. დაუშვათ F უწყვეტია x -ის მიმართ და არ წარმოადგენს ოპერატორულ პოლინომს. ფრეშეს თეორემის თანახმად მას შეიძლება მიუახლოვდნენ ოპერატორული პოლინომების მიმდევრობით. საფეხუროვანი ან δ -ფუნქციების გამოყენება შემავალ სიგნალებად ამ შემთხვევაში არასაფუძვლიანია, რადგანაც ეს ფუნქციები არ ეკუთვნიან $C[0,T]$ კლასს. ამის გარდა, არ არის გარანტია კრებადობისა კონსტრუქციულად აგებული პოლინომების მიმდევრობის, არაფერს ვამბობთ იმის შესახებ, რომ საჭიროა მიყვანა ერთგვაროვან პოლინომიალურ ოპერატორებზე და პოლინომის ხარისხის გაზრდასთან დაკავშირებით საჭიროა ყველა გულების ხელახლა განსაზღვრა (იხ. მაგალითად [6]). ყველაფერს ამას მივყავართ ტექნიკური და გამოთვლითი სამუშაოების მოცულობის გაზრდაზე.შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ოპერატორული გულების განსაზღვრა საფეხუროვანი ფუნქციების საშუალებით გამოიყენებოდა მხოლოდ სტაციონალური სისტემებისთვის. თუ $F\big(t,x(\tau)\big)$ ოპერატორი ანალიზურია გატოს აზრითაც კი $x=0$ წერტილში და არის დაფუძნება საფეხუროვანი შემავალი ფუნქციების გამოყენების შესახებ, მაგრამ მაინც ღია რჩება საკითხი აგებული ოპერატორული პოლინომების მიმდევრობის კრებადობის შესახებ ცნობილი მეთოდიკით (იხ. მაგალითად [6]) აგებული ოპერატორული გულებით.

ნაშრომში [1] ნაჩვენებია,რომ თუ ოპერატორი $F\big(t,x(\tau)\big)$ ანალიზურია გატოს აზრით $x=0$ წერტილში და თანაბრად კრებადია არეში $\|x\|_{L_2[0,T]}\le R$, მაშინ გულების განსაზღვრის შემოთავაზებული მეთოდი საშუალებას გვაძლევს $F\big(t,x(\tau)\big)$ -სთვის

აგებული ოპერატორული მწკრივი ასევე თანაბრად კრებადია ზემოაღნიშნულ არეში. ამასთან ერთად მოცემული მეთოდი გამოიყენება არასტაციონალური გულების განსაზღვრისთვისაც.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია თეორემა 1. ვთქვათ არაწრფივი ოპერატორი $F(t,x(\tau))$ განსაზღვრულია $L_2[0,T]$-ში და ანალიზურია გატოს აზრით $x=0$ წერტილში. მაშინ ამ წერტილის მიდამოში სამართლიანია გაშლა

$$F(t,x(\tau)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\underbrace{\int_0^T \ldots\ldots\int_0^T}_{n} K_n(t,z_1,z_2,\ldots z_n)x(z_1)\ldots.x(z_n)dz_1\ldots dz_n, \qquad (4.1)$$

სადაც

$K_n(t,z_1,z_2,\ldots z_n)\,\epsilon\, L_2\left(\underbrace{[0,T]\mathrm{x}\ldots[0,\mathrm{T}]}_{n}\right)z_1,\ldots.z_n$ ცვლადების მიმართ, როცა $t\,\epsilon\,[0,T],\ n=1,2,\ldots.$

დაუშვათ სრულდება თეორემა 1-ის პირობები. მაშინ (4.1) ოპერატორულ მწკრივში გულების განსაზღვრისთვის შეიძლება გამოვიყენოთ საფეხუროვანი შემავალი ფუნქციები. ადგილი აქვს თეორემას 2. თეორემა 1-ის პირობებში სამართლიანია თანაფარდობები

$$K_0(t) = F(t,0),$$

$$K_n(t,\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\xi_{1,\ldots,}\partial\xi_n}\left\{\frac{\partial^n F(t,c\sum_{i=1}^n H(*-\xi_i)}{\partial c^n}\bigg|_{c=0}\right\}, \qquad (4.2)$$

$$0\le\xi_1,\xi_2,\ldots\ldots,\xi_n\le T,$$

$H(*-\xi_i)$ - ჰევისაიდის ფუნქციები.

დამტკიცება. დაუშვათ (4.1)-ში $x=cH(*-\xi_1)$.გვექნება

$$F(t,cH(*-\xi_1)) = K_0(t)+\frac{c}{1!}\int_0^T K_1(t,z)H(z-\xi_1)dz+$$

$$+\frac{c^2}{2!}\int_0^T\int_0^T K_2(t,z_1,z_2)H(z_1-\xi_1)\,H(z_2-\xi_1)dz_1dz_2+\frac{c^3}{3!}(\quad)+\cdots \qquad (4.3)$$

გავაწარმოვოთ (4.3) თანაფარდობა c-ს მიმართ $c=0$ წერტილში, მივიღებთ

$$\frac{\partial F(t,cH(*-\xi_1))}{\partial c}\bigg|_{c=0} = \frac{1}{1!}\int_0^T k_1(t,z)H(z-\xi_1)dz = \int_{\xi_1}^T K_1(t,z)dz.$$

გავაწარმოვოთ შემდეგ ξ_1 -ით, მივიღებთ

$$K_1(t,\xi_1) = -\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left\{\frac{\partial F(t,cH(*-\xi_1))}{\partial c}\bigg|_{c=0}\right\}.$$

K_2 -ის საპოვნელად დაუშვათ (4.1)-ში $x=c\big(H(*-\xi_1)+H(*-\xi_2)\big),\ 0\le\xi_1,\xi_2\le T,$

მაშინ

$$F\left(t, c\sum_{i=1}^{2} H(* - \xi_i)\right) = K_0(t) + \frac{c}{1!}\int_0^T K_1(t,z)\big(H(z-\xi_1) + H(z-\xi_2)\big)dz +$$

$$\frac{c^2}{2!}\int_0^T\int_0^T K_2(t,z_1,z_2)(H(z_1-\xi_1)+H(z_1-\xi_2)) * (H(z_2-\xi_1)+H(z_2-\xi_2)))dz_1dz_2 + \frac{c_3}{3!}(\,)\,....$$

ორჯერ გაწარმოებით c-ს მიმართ $c = 0$ წერტილში, მივიღებთ

$$\left.\frac{\partial^2 F(t, c\sum_{i=1}^{2} H(* - \xi_i))}{\partial c^2}\right|_{c=0} = \int_0^T\int_0^T K_2(t,z_1,z_2)(*)dz_1dz_2 =$$

$$= \int_0^T\int_0^T K_2(t,z_1,z_2)H(z_1-\xi_1)\,H(z_2-\xi_1)dz_1dz_2 +$$

$$+\int_0^T\int_0^T K_2(t,z_1,z_2)H(z_1-\xi_2)\,H(z_2-\xi_2)dz_1dz_2 + 2!\int_{\xi_1}^T\int_{\xi_2}^T K_2(t,z_1,z_2)\,dz_1dz_2,$$

$$K_2(t,\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\left\{\left.\frac{\partial^2 F(t, c\sum_{ic=1}^{2} H(* - \xi_i))}{\partial c^2}\right|_{c=0}\right\}.$$

თუ გავაგრძელებთ ანალოგიურ მსჯელობას, მივიღებთ (4.2) თანაფარდობებს. თეორემა დამტკიცებულია.

K_n გულების აგების მეთოდი აღწერილია თეორემის დამტკიცებასა და ფორმულირებაში. ნათელია, რომ თუ მწკრივი (4.1) თანაბრად კრებადია $\|x\|_{L_2[0,T]} \le R$ არეში , მაშინ ამ არეში თანაბრად კრებადია მწკრივი, რომელშიც გულები აგებულია ზემოაღნიშნული მეთოდით (4.2) ფორმულით. ავღნიშნავთ,ასევე რომ ამ მეთოდის გამოყენება არ საჭიროებს ნახევრად წრფივ ერთგვაროვან ოპერატორებზე მიყვანას და ყველა წინა გულების ხელახლა განსაზღვრას მიახლოებითი მწკრივის მონაკვეთის ხარისხის გაზრდისას.

თავი 2. ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა ნიუტონის ტიპის ოპერატორული საინტერპოლაციო პოლინომების გამოყენებით

§1. პირდაპირი ოპერატორულ-საინტერპოლაციო მეთოდი.

ოპერატორული გულების აგების პირდაპირი მეთოდის ილუსტრაციისთვის დაწრლილებით აღვწეროთ $K_1(x,\xi,z_1)$ და $K_2(x,\xi,z_1,z_2)$ოპერატორული გულების აგების პროცესი. $K_1(x,\xi,z_1)$ოპერატორულ გულს აქვს შემდეგი სახე

$$K_1(x,\xi,z_1) = -\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial z_1}G(x,\xi,\varsigma_1),\ \ \varsigma_1 = hH(*-z_1). \qquad (8)$$

როგორც ცნობილია (იხ. მაგალითად [10], [11]), $G(x,\xi,\varsigma_1)$ გრინის ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო ამოცანას

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,\xi,\varsigma_1) - hH(x-z_1)G(x,\xi,\varsigma_1) = -\delta(x-\xi), \\ G(0,\xi,\varsigma_1) = G(1,\xi,\varsigma_1) = 0, \qquad\qquad 0 < \ x,\xi < 1, \end{cases} \qquad (9)$$

სადაც $\delta(z)$ არის დირაკის დელტა-ფუნქცია

$$\delta(z) = \begin{cases} 0, & z \neq 0, \\ \infty, & z = 0, \end{cases} \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(z)dz = 1. \qquad (10)$$

გავაწარმოოთ (9) სისტემა z_1 -ით, გავამრავლოთ $-\frac{1}{h}$ -ზე. ელემენტალური გარდაქმნების შედეგად $K_1(x,\xi,z_1)$ -ის განსაზღვრისთვის ვღებულობთ სასაზღვრო ამოცანას

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2}K_1(x,\xi,z_1) - hH(x-z_1)K_1(x,\xi,z_1) = \delta(x-z_1)G(x,\xi,\varsigma_1), \\ K_1(0,\xi,z_1) = K_1(1,\xi,z_1) = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

გრინის ფუნქციის გამოყენებით ვღებულობთ

$$K_1(x,\xi,z_1) = \int_0^1 G(x,\eta,\varsigma_1)\delta(\eta-z_1)G(\eta,\xi,\varsigma_1)d\eta = -G(x,z_1,\varsigma_1) * G(z_1,\xi,\varsigma_1), \qquad (12)$$

ე.ი. $K_1(x,\xi,z_1)$ წარმოიდგინება როგორც ორი $G(x,z_1,\varsigma_1)$ და $G(z_1,\xi,\varsigma_1)$ გრინის ფუნქციის ნამრავლი. ეს გრინის ფუნქციები უშუალოდ არ აიგება. პირველად აიგება ξ და z_1 პარამეტრებზე დამოკიდებული $G(x,\xi,\varsigma_1)$ გრინის ფუნქცია, რომელსაც ექნება ორო სახე. იქიდან კი, როგორც კერძო შემთხვევები, მიიღება ზემოაღნიშნული გრინის ფუნქციები.$G(x,\xi,\varsigma_1)$ გრინის ფუნქციის ასაგებად, რომელიც აკმაყოფილებს (9)

სასაზღვრო ამოცანას, ვიყენებთ მის ძირითად თვისებებს. z_1 წერტილში $G(x,\xi,\varsigma_1)$ ფუნქცია და x -ით მისი წარმოებული უწყვეტია, ხოლო ξ წერტილში უწყვეტია თვითონ ფუნქცია, ხოლო მის x -ით წარმოებულს აქვს სასრული ნახტომი, რომელიც -1-ის ტოლია. როცა $\xi \le z_1$ გვაქვს გრინის ფუნქციის პირველი სახე:

$$G^{1,1}(x,\xi,\varsigma_1)=\begin{cases} c_1^{1,1}(\xi,z_1)+c_2^{1,1}(\xi,z_1)*x, & x\in[0,\xi],\\ c_3^{1,1}(\xi,z_1)+c_4^{1,1}(\xi,z_1)*x, & x\in[\xi,z_1],\\ c_5^{1,1}(\xi,z_1)*e^{-x\sqrt{h}}+c_6^{1,1}(\xi,z_1)*e^{x\sqrt{h}}, & x\in[z_1,1],\end{cases} \qquad (13)$$

სადაც

$$c_1^{1,1}(\xi,z_1)\equiv 0,$$

$$c_2^{1,1}(\xi,z_1)=\frac{\left(\sqrt{h}(z_1-\xi)+1\right)e^{(1-z_1)\sqrt{h}}+\left(\sqrt{h}(z_1-\xi)-1\right)e^{-(1-z_1)\sqrt{h}}}{\left(z_1\sqrt{h}+1\right)e^{(1-z_1)\sqrt{h}}+\left(z_1\sqrt{h}-1\right)e^{-(1-z_1)\sqrt{h}}},$$

$$c_3^{1,1}(\xi,z_1)=\xi,\ \ c_4^{1,1}(\xi,z_1)=c_2^{1,1}(\xi,z_1)-1, \qquad (14)$$

$$c_5^{1,1}(\xi,z_1)=\frac{e^{z_1\sqrt{h}}}{2\sqrt{h}}\left(\left(z_1\sqrt{h}-1\right)c_4^{1,1}(\xi,z_1)-\xi\sqrt{h}\right),$$

$$c_6^{1,1}(\xi,z_1)=\frac{e^{-z_1\sqrt{h}}}{2\sqrt{h}}\left(\left(z_1\sqrt{h}+1\right)c_4^{1,1}(\xi,z_1)+\xi\sqrt{h}\right).$$

შესაბამისად (12) ფორმულაში შემავალი $G(x,z_1,\varsigma_1)$ და $G(z_1,\xi,\varsigma_1)$ გრინის ფუნქციებს, რომლებიც წარმოადგენენ (13) ფორმულის კერძო შემთხვევებს, ვიღებთ შემდეგი ფორმით:

$$G^{1,1}(z_1,\xi,\varsigma_1)=\ c_2^{1,1}(\xi,z_1)*\ z_1+\ \xi-\ z_1\,, \qquad (15)$$

$$G^{1,1}(x,z_1,\varsigma_1)=\begin{cases} c_2^{1,1}(z_1,z_1)*x, & x\in[0,z_1],\\ c_5^{1,1}(z_1,z_1)*e^{-x\sqrt{h}}+c_6^{1,1}(z_1,z_1)*e^{x\sqrt{h}}, & x\in[z_1,1].\end{cases} \qquad (16)$$

როცა $\xi > z_1$ გვაქვს გრინის ფუნქციის მეორე სახე:

$$G^{2,1}(x,\xi,\varsigma_1)=\begin{cases} c_1^{2,1}(\xi,z_1)+c_2^{2,1}(\xi,z_1)*x, & x\in[0,z_1],\\ c_3^{2,1}(\xi,z_1)*e^{-x\sqrt{h}}+c_4^{2,1}(\xi,z_1)**e^{x\sqrt{h}}, & x\in[z_1,\xi],\\ c_5^{2,1}(\xi,z_1)*e^{-x\sqrt{h}}+c_6^{2,1}(\xi,z_1)*e^{x\sqrt{h}}, & x\in[\xi,1],\end{cases} \qquad (17)$$

სადაც

$$c_1^{2,1}(\xi,z_1)\equiv 0,$$

$$c_2^{2,1}(\xi,z_1)=\frac{e^{(1-\xi)\sqrt{h}}-e^{-(1-\xi)\sqrt{h}}}{\left(z_1\sqrt{h}+1\right)e^{(1-z_1)\sqrt{h}}+\left(z_1\sqrt{h}-1\right)e^{-(1-z_1)\sqrt{h}}},$$

$$c_3^{2,1}(\xi,z_1)=\tfrac{z_1\sqrt{h}-1}{2\sqrt{h}}e^{z_1\sqrt{h}}*c_2^{2,1}(\xi,z_1),\ \ c_4^{2,1}(\xi,z_1)=\tfrac{z_1\sqrt{h}+1}{2\sqrt{h}}e^{-z_1\sqrt{h}}*c_2^{2,1}(\xi,z_1), \qquad (18)$$

$$c_5^{2,1}(\xi,z_1)=c_3^{2,1}(\xi,z_1)+\frac{1}{2\sqrt{h}}e^{\xi\sqrt{h}},\ \ c_6^{2,1}(\xi,z_1)=c_4^{2,1}(\xi,z_1)-\frac{1}{2\sqrt{h}}e^{-\xi\sqrt{h}}.$$

ანალოგიურად (12) ფორმულაში შემავალი $G(x,z_1,\varsigma_1)$ და $G(z_1,\xi,\varsigma_1)$ გრინის ფუნქციებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$G^{2,1}(z_1,\xi,\varsigma_1)=c_2^{2,1}(\xi,z_1)*z_1\,, \qquad (19)$$

$$G^{2,1}(x,z_1,\varsigma_1)=\begin{cases}c_2^{2,1}(z_1,z_1)*x, & x\in[0,z_1],\\ c_5^{2,1}(z_1,z_1)*e^{-x\sqrt{h}}+c_6^{2,1}(z_1,z_1)*e^{x\sqrt{h}}, & x\in[z_1,1].\end{cases} \qquad (20)$$

ადვილი შესამოწმებელია,რომ

$$G^{1,1}(x,z_1,\varsigma_1)\equiv G^{2,1}(x,z_1,\varsigma_1),\ \ G^{1,1}(z_1,\xi,\varsigma_1)=\ G^{2,1}(z_1,\xi,\varsigma_1),\ \ \text{როცა} z_1=\xi.$$

$K_2(x,\xi,z_1,z_2)$ოპერატორულ გულს აქვს შემდეგი სახე

$$K_2(x,\xi,z_1,z_2)=\frac{1}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}G(x,\xi,\varsigma_2),\ \ \varsigma_2=h\sum_{j=1}^{2}H\left(*-z_j\right). \qquad (21)$$

როგორც ცნობილია (იხ. მაგალითად [10], [11]), $G(x,\xi,\varsigma_2)$ გრინის ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო ამოცანას

$$\begin{cases}\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,\xi,\ \varsigma_2)-h\sum_{j=1}^{2}H\left(x-z_j\right)G(x,\xi,\ \varsigma_2)=-\delta(x-\xi),\\ G(0,\xi,\ \varsigma_2)=G(1,\xi,\ \varsigma_2)=0.\end{cases} \qquad (22)$$

გავაწარმოოთ (22) სისტემა $z_1\,,z_2$ -ით, გავამრავლოთ $\frac{1}{h^2}$ -ზე. ელემენტალური გარდაქმნების შედეგად $K_2(x,\xi,z_1,z_2)$ -ის განსაზღვრისთვის ვღებულობთ სასაზღვრო ამოცანას

$$\begin{cases}\frac{\partial^2}{\partial x^2}K_2(x,\xi,z_1,z_2)-h\sum_{j=1}^{2}H\left(x-z_j\right)K_2(x,\xi,z_1,z_2)=\\ =-\frac{1}{h}*\left[\delta(x-z_1)*\frac{\partial}{\partial z_2}G(x,\xi,\ \varsigma_2)+\delta(x-z_2)*\frac{\partial}{\partial z_1}G(x,\xi,\ \varsigma_2)\right],\\ K_2(0,\xi,z_1,z_2)=K_2(1,\xi,z_1,z_2)=0.\end{cases} \qquad (23)$$

მარჯვენა მხარეში შემავალი $\frac{\partial}{\partial z_1}G(x,\xi,\ \varsigma_2)$ და $\frac{\partial}{\partial z_2}G(x,\xi,\ \varsigma_2)$ ფუნქციები განისაზვრებიან ისევე, როგორც $K_1(x,\xi,z_1)$ გული:

$$\frac{\partial}{\partial z_1}G(x,\xi,\ \varsigma_2)=h*G(x,z_1,\ \varsigma_2)*G(z_1,\xi,\ \varsigma_2), \qquad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_2}G(x,\xi,\ \varsigma_2)=h*G(x,z_2,\ \varsigma_2)*G(z_2,\xi,\ \varsigma_2), \qquad (25)$$

გრინის ფუნქციის გამოყენებით $K_2(x,\xi,z_1,z_2)$ -ისთვის ვღებულობთ

$$K_2(x,\xi,z_1,z_2)=\int_0^1 G(x,\eta,\ \varsigma_2)*\frac{1}{h}*[\delta(\eta-z_1)*\frac{\partial}{\partial z_2}G(x,\xi,\ \varsigma_2)|_{x=\eta}+$$

$$+\delta(\eta-z_2)*\frac{\partial}{\partial z_1}G\big(x,\xi,\ \varsigma_2)|_{x=\eta}\big]d\eta. \qquad (26)$$

(24) და (25) გამოსახულებები ჩავსვათ (26)-ში, მივიღებთ

$$K_2(x,\xi,z_1,z_2)=G(x,z_1,\ \varsigma_2)*G(z_1,z_2,\ \varsigma_2)*G(z_2,\xi,\ \varsigma_2)+$$

$$+G(x,z_2,\ \varsigma_2)*G(z_2,z_1,\ \varsigma_2)\ *\ G(z_1,\xi,\ \varsigma_2), \qquad (27)$$

ე.ი. $K_2(x,\xi,z_1,z_2)$ წარმოიდგინება როგორც სამი გრინის ფუნქციის ნამრავლი. ეს გრინის ფუნქციები უშუალოდ არ აიგება. პირველად აიგება ξ,z_1 და z_2 პარამეტრებზე დამოკიდებული $G(x,\xi,\varsigma_2)$ გრინის ფუნქცია, რომელსაც ექნება სამი სახე. იქიდან კი, როგორც კერძო შემთხვევები, მიიღება ზემოაღნიშნული გრინის ფუნქციები, რომლებიც შედიან (27) ფორმულაში. $G(x,\xi,\varsigma_2)$ გრინის ფუნქციის ასაგებად, რომელიც აკმაყოფილებს (22) სასაზღვრო ამოცანას, ვიყენებთ მის ძირითად თვისებებს. z_1 და z_2 წერტილებში $G(x,\xi,\varsigma_2)$ ფუნქცია და x -ით მისი წარმოებული უწყვეტია, ხოლო ξ წერტილში უწყვეტია თვითონ ფუნქცია, ხოლო მის x -ით წარმოებულს აქვს სასრული ნახტომი, რომელიც -1-ის ტოლია.

როცა $\xi<z_1<z_2$ გვაქვს გრინის ფუნქციის პირველი სახე:

$$G^{1,2}(x,\xi,\varsigma_2)=\begin{cases} c_1^{1,2}(\xi,z_1,z_2)+c_2^{1,2}(\xi,z_1,z_2)*x, & x\in[0,\xi],\\ c_3^{1,2}(\xi,z_1,z_2)+c_4^{1,2}(\xi,z_1,z_2)*x, & x\in[\xi,z_1],\\ c_5^{1,2}(\xi,z_1,z_2)*e^{-x\sqrt{h}}+c_6^{1,2}(\xi,z_1,z_2)*e^{x\sqrt{h}}, & x\in[z_1,z_2],\\ c_7^{1,2}(\xi,z_1,z_2)*e^{-x\sqrt{2h}}+c_8^{1,2}(\xi,z_1,z_2)*e^{x\sqrt{2h}}, & x\in[z_2,1].\end{cases} \qquad (28)$$

სადაც

$$c_1^{1,2}(\xi,z_1,z_2)\equiv 0,$$

$$c_2^{1,2}(\xi,z_1,z_2)=1-\xi\sqrt{h}*\frac{(\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{h}\left((\sqrt{2}-1)z_2+z_1-\sqrt{2}\right)}+}{(\sqrt{2}+1)(z_1\sqrt{h}-1)e^{\sqrt{h}\left((\sqrt{2}-1)z_2+z_1-\sqrt{2}\right)}+}\dots\dots$$

$$\dots\frac{+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{h}\left((\sqrt{2}+1)z_2-z_1-\sqrt{2}\right)}+(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{h}\left((\sqrt{2}+1)z_2-z_1-\sqrt{2}\right)}+}{+(\sqrt{2}-1)(z_1\sqrt{h}+1)e^{\sqrt{h}\left((\sqrt{2}+1)z_2-z_1-\sqrt{2}\right)}+(\sqrt{2}-1)(z_1\sqrt{h}-1)e^{-\sqrt{h}\left((\sqrt{2}+1)z_2-z_1-\sqrt{2}\right)}+}\dots$$

$$\dots\frac{+(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{h}\left((\sqrt{2}-1)z_2+z_1-\sqrt{2}\right)}}{(\sqrt{2}+1)(z_1\sqrt{h}+1)e^{\sqrt{h}\left((\sqrt{2}-1)z_2+z_1-\sqrt{2}\right)}},$$

$$c_3^{1,2}(\xi,z_1,z_2)=\xi,\ c_4^{1,2}(\xi,z_1,z_2)=c_2^{1,2}(\xi,z_1,z_2)-1, \qquad (29)$$

$$c_5^{1,2}(\xi,z_1,z_2)=\frac{1}{2\sqrt{h}}e^{z_1\sqrt{h}}\Big(\big(z_1\sqrt{h}-1\big)*c_4^{1,2}(\xi,z_1,z_2)+\xi\sqrt{h}\Big),$$

$$c_6^{1,2}(\xi,z_1,z_2)=\frac{1}{2\sqrt{h}}e^{-z_1\sqrt{h}}\Big(\big(z_1\sqrt{h}+1\big)*c_4^{1,2}(\xi,z_1,z_2)+\xi\sqrt{h}\Big),$$

$$c_7^{1,2}(\xi,z_1,z_2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{z_2\sqrt{2h}}*\Big(\big(\sqrt{2}+1\big)e^{-z_2\sqrt{h}}c_5^{1,2}(\xi,z_1,z_2)+\big(\sqrt{2}-1\big)e^{z_2\sqrt{h}}c_6^{1,2}(\xi,z_1,z_2)\Big),$$

$$c_8^{1,2}(\xi,z_1,z_2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-z_2\sqrt{2h}}*\Big(\big(\sqrt{2}-1\big)e^{-z_2\sqrt{h}}c_5^{1,2}(\xi,z_1,z_2)+\big(\sqrt{2}+1\big)e^{z_2\sqrt{h}}c_6^{1,2}(\xi,z_1,z_2)\Big).$$

შესაბამისად (27) ფორმულაში შემავალ გრინის ფუნქციებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$G^{1,2}(x,z_1,\varsigma_2)=\begin{cases} c_2^{1,2}(z_1,z_1,z_2)*x, & x\in[0,z_1],\\ c_5^{1,2}(z_1,z_1,z_2)*e^{-x\sqrt{h}}+c_6^{1,2}(z_1,z_1,z_2)*e^{x\sqrt{h}}, & x\in[z_1,z_2],\\ c_7^{1,2}(z_1,z_1,z_2)*e^{-x\sqrt{2h}}+c_8^{1,2}(z_1,z_1,z_2)*e^{x\sqrt{2h}}, & x\in[z_2,1],\end{cases} \quad (30)$$

$$G^{1,2}(z_1,z_2,\varsigma_2)=c_2^{1,2}(z_1,z_1,z_1)*z_1, \quad (31)$$

$$G^{1,2}(z_2,\xi,\varsigma_2)=c_5^{1,2}(\xi,z_1,z_2)*e^{-z_2\sqrt{h}}+c_6^{1,2}(\xi,z_1,z_2)*e^{z_2\sqrt{h}}, \quad (32)$$

$$G^{1,2}(x,z_2,\varsigma_2)=\begin{cases} c_2^{1,2}(z_2,z_2,z_2)*x, & x\in[0,z_2],\\ c_7^{1,2}(z_2,z_2,z_2)*e^{-x\sqrt{2h}}+c_8^{1,2}(z_2,z_2,z_2)*e^{x\sqrt{2h}}, & x\in[z_2,1].\end{cases} \quad (33)$$

$$G^{1,2}(z_2,z_1,\varsigma_2)=c_5^{1,2}(z_1,z_1,z_2)*e^{-z_2\sqrt{h}}+c_6^{1,2}(z_1,z_1,z_2)*e^{z_2\sqrt{h}}, \quad (34)$$

$$G^{1,2}(z_1,\xi,\varsigma_2)=c_3^{1,2}(\xi,z_1,z_2)+c_4^{1,2}(\xi,z_1,z_2)*z_1. \quad (35)$$

როცა $z_1 < \xi < z_2$ გვაქვს გრინის ფუნქციის მეორე სახე:

$$G^{2,2}(x,\xi,\varsigma_2)=\begin{cases} c_1^{2,2}(\xi,z_1,z_2)+c_2^{2,2}(\xi,z_1,z_2)*x, & x\in[0,z_1],\\ c_3^{2,2}(\xi,z_1,z_2)*e^{-x\sqrt{h}}+c_4^{2,2}(\xi,z_1,z_2)*e^{x\sqrt{h}}, & x\in[z_1,\xi],\\ c_5^{2,2}(\xi,z_1,z_2)*e^{-x\sqrt{h}}+c_6^{2,2}(\xi,z_1,z_2)*e^{x\sqrt{h}}, & x\in[\xi,z_2],\\ c_7^{2,2}(\xi,z_1,z_2)*e^{-x\sqrt{2h}}+c_8^{2,2}(\xi,z_1,z_2)*e^{x\sqrt{2h}}, & x\in[z_2,1],\end{cases} \quad (36)$$

სადაც

$$c_1^{2,2}(\xi,z_1,z_2)\equiv 0,$$

$$c_2^{2,2}(\xi,z_1,z_2)=$$

$$=\frac{\big(\sqrt{2}-1\big)e^{\sqrt{h}\left((\sqrt{2}+1)z_2-\xi-\sqrt{2}\right)}-\big(\sqrt{2}+1\big)e^{\sqrt{h}\left((\sqrt{2}-1)z_2+\xi-\sqrt{2}\right)}-}{\big(\sqrt{2}+1\big)\big(z_1\sqrt{h}+1\big)e^{\sqrt{h}\left((\sqrt{2}-1)z_2+z_1-\sqrt{2}\right)}+\big(\sqrt{2}-1\big)\big(z_1\sqrt{h}+1\big)e^{\sqrt{h}\left((\sqrt{2}+1)z_2-z_1-\sqrt{2}\right)}}\cdots$$

$$\cdots\frac{-\big(\sqrt{2}-1\big)e^{-\sqrt{h}\left((\sqrt{2}+1)z_2-\xi-\sqrt{2}\right)}+\big(\sqrt{2}+1\big)e^{-\sqrt{h}\left((\sqrt{2}-1)z_2+\xi-\sqrt{2}\right)}}{\big(\sqrt{2}-1\big)\big(z_1\sqrt{h}-1\big)e^{-\sqrt{h}\left((\sqrt{2}-1)z_2-z_1-\sqrt{2}\right)}+\big(\sqrt{2}+1\big)\big(z_1\sqrt{h}-1\big)e^{\sqrt{h}\left((\sqrt{2}-1)z_2+z_1-\sqrt{2}\right)}},$$

$$c_3^{2,2}(\xi, z_1, z_2) = \frac{z_1\sqrt{h} - 1}{2\sqrt{h}} e^{z_1\sqrt{h}} * c_2^{2,2}(\xi, z_1, z_2),$$

$$c_4^{2,2}(\xi, z_1, z_2) = \frac{z_1\sqrt{h}+1}{2\sqrt{h}} e^{-z_1\sqrt{h}} * c_2^{2,2}(\xi, z_1, z_2), \qquad (37)$$

$$c_5^{2,2}(\xi, z_1, z_2) = c_3^{2,2}(\xi, z_1, z_2) + \frac{1}{2\sqrt{h}} e^{\xi\sqrt{h}}, c_6^{2,2}(\xi, z_1, z_2) = c_4^{2,2}(\xi, z_1, z_2) - \frac{1}{2\sqrt{h}} e^{-\xi\sqrt{h}},$$

$$c_7^{2,2}(\xi, z_1, z_2) = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} e^{\sqrt{h}(\sqrt{2}-1)z_2} c_5^{2,2}(\xi, z_1, z_2) + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} e^{\sqrt{h}(\sqrt{2}+1)z_2} c_6^{2,2}(\xi, z_1, z_2),$$

$$c_8^{2,2}(\xi, z_1, z_2) = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} e^{-\sqrt{h}(\sqrt{2}+1)z_2} c_5^{2,2}(\xi, z_1, z_2) + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} e^{-\sqrt{h}(\sqrt{2}-1)z_2} c_6^{2,2}(\xi, z_1, z_2).$$

შესაბამისად (27) ფორმულაში შემავალ გრინის ფუნქციებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$G^{2,2}(x, z_1, \varsigma_2) = \begin{cases} c_2^{2,2}(z_1, z_1, z_2) * x, & x \in [0, z_1], \\ c_5^{2,2}(z_1, z_1, z_2) * e^{-x\sqrt{h}} + c_6^{2,2}(z_1, z_1, z_2) * e^{x\sqrt{h}}, & x \in [z_1, z_2], \\ c_7^{2,2}(z_1, z_1, z_2) * e^{-x\sqrt{2h}} + c_8^{2,2}(z_1, z_1, z_2) * e^{x\sqrt{2h}}, & x \in [z_2, 1], \end{cases} \quad (38)$$

$$G^{2,2}(z_1, z_2, \varsigma_2) = c_2^{2,2}(z_2, z_1, z_2) * z_1, \qquad (39)$$

$$G^{2,2}(z_2, \xi, \varsigma_2) = c_5^{2,2}(\xi, z_1, z_2) * e^{-z_2\sqrt{h}} + c_6^{2,2}(\xi, z_1, z_2) * e^{z_2\sqrt{h}}, \quad (40)$$

$$G^{2,2}(x, z_2, \varsigma_2) = \begin{cases} c_2^{2,2}(z_2, z_1, z_2) * x, & x \in [0, z_1], \\ c_5^{2,2}(z_2, z_1, z_2) * e^{-x\sqrt{h}} + c_6^{2,2}(z_2, z_1, z_2) * e^{x\sqrt{h}}, & x \in [z_1, z_2], \\ c_7^{2,2}(z_2, z_1, z_2) * e^{-x\sqrt{2h}} + c_8^{2,2}(z_2, z_1, z_2) * e^{x\sqrt{2h}}, & x \in [z_2, 1], \end{cases} \quad (41)$$

$$G^{2,2}(z_2, z_1, \varsigma_2) = c_5^{2,2}(z_1, z_1, z_2) * e^{-z_2\sqrt{h}} + c_6^{2,2}(z_1, z_1, z_2) * e^{z_2\sqrt{h}}, \qquad (42)$$

$$G^{2,2}(z_1, \xi, \varsigma_2) = c_2^{2,2}(\xi, z_1, z_2) * z_1. \qquad (43)$$

როცა $z_1 < z_2 < \xi$ გვაქვს გრინის ფუნქციის მესამე სახე:

$$G^{3,2}(x, \xi, \varsigma_2) = \begin{cases} c_1^{3,2}(\xi, z_1, z_2) + c_2^{3,2}(\xi, z_1, z_2) * x, & x \in [0, z_1], \\ c_3^{3,2}(\xi, z_1, z_2) + c_4^{3,2}(\xi, z_1, z_2), & x \in [z_1, z_2], \\ c_5^{3,2}(\xi, z_1, z_2) * e^{-x\sqrt{2h}} + c_6^{3,2}(\xi, z_1, z_2) * e^{x\sqrt{2h}}, & x \in [z_2, \xi], \\ c_7^{3,2}(\xi, z_1, z_2) * e^{-x\sqrt{2h}} + c_8^{3,2}(\xi, z_1, z_2) * e^{x\sqrt{2h}}, & x \in [\xi, 1], \end{cases} \qquad (44)$$

სადაც

$$c_1^{3,2}(\xi, z_1, z_2) \equiv 0,$$

$$c_2^{3,2}(\xi, z_1, z_2) =$$

$$= \frac{2(e^{\sqrt{2h}(1-\xi)} -}{(\sqrt{2}+1)(z_1\sqrt{h}-1)e^{\sqrt{h}\left((\sqrt{2}-1)z_2 + z_1 - \sqrt{2}\right)} + (\sqrt{2}-1)(z_1\sqrt{h}+1)e^{\sqrt{h}\left((\sqrt{2}+1)z_2 - z_1 - \sqrt{2}\right)} +} \cdots$$

$$\frac{-e^{-\sqrt{2h}(1-\xi)})}{+(\sqrt{2}-1)(z_1\sqrt{h}-1)e^{-\sqrt{h}\left((\sqrt{2}+1)z_2-z_1-\sqrt{2}\right)}+(\sqrt{2}+1)(z_1\sqrt{h}+1)e^{-\sqrt{h}\left((\sqrt{2}-1)z_2+z_1-\sqrt{2}\right)}},$$

$$c_3^{3,2}(\xi,z_1,z_2)=\frac{z_1\sqrt{h}-1}{2\sqrt{h}}e^{z_1\sqrt{h}}*c_2^{3,2}(\xi,z_1,z_2),$$

$$c_4^{3,2}(\xi,z_1,z_2)=\frac{z_1\sqrt{h}+1}{2\sqrt{h}}e^{-z_1\sqrt{h}}*c_2^{3,2}(\xi,z_1,z_2), \qquad (45)$$

$$c_5^{3,2}(\xi,z_1,z_2)=\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}e^{\sqrt{h}(\sqrt{2}-1)z_2}c_3^{3,2}(\xi,z_1,z_2)+\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}e^{\sqrt{h}(\sqrt{2}+1)z_2}c_4^{3,2}(\xi,z_1,z_2),$$

$$c_6^{3,2}(\xi,z_1,z_2)=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{h}(\sqrt{2}-1)z_2}c_3^{3,2}(\xi,z_1,z_2)+\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{h}(\sqrt{2}+1)z_2}c_4^{3,2}(\xi,z_1,z_2),$$

$$c_7^{3,2}(\xi,z_1,z_2)=c_5^{3,2}(\xi,z_1,z_2)+\frac{1}{2\sqrt{2h}}e^{\xi\sqrt{2h}},c_8^{3,2}(\xi,z_1,z_2)=c_6^{3,2}(\xi,z_1,z_2)-\frac{1}{2\sqrt{2h}}e^{-\xi\sqrt{2h}}.$$

შესაბამისად (27) ფორმულაში შემავალ გრინის ფუნქციებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$G^{3,2}(x,z_1,\varsigma_2)=\begin{cases}c_2^{3,2}(z_1,z_1,z_1)*x, & x\in[0,z_1],\\ c_7^{3,2}(z_1,z_1,z_1)*e^{-x\sqrt{2h}}+c_8^{1,2}(z_1,z_1,z_1)*e^{x\sqrt{2h}}, & x\in[z_1,1],\end{cases} \qquad (46)$$

$$G^{3,2}(z_2,\xi,\varsigma_2)=c_3^{3,2}(\xi,z_1,z_2)*e^{-z_2\sqrt{h}}+c_4^{3,2}(\xi,z_1,z_2)*e^{z_2\sqrt{h}}, \qquad (47)$$

$$G^{3,2}(z_1,z_2,e_2)=c_2^{3,2}(z_2,z_1,z_2)*z_1. \qquad (48)$$

$$G^{3,2}(x,z_2,\varsigma_2)=\begin{cases}c_2^{3,2}(z_2,z_1,z_2)*x, & x\in[0,z_1],\\ c_3^{3,2}(z_2,z_1,z_2)*e^{-x\sqrt{h}}+c_4^{3,2}(z_2,z_1,z_2)*e^{x\sqrt{h}}, & x\in[z_1,z_2],\\ c_7^{3,2}(z_2,z_1,z_2)*e^{-x\sqrt{2h}}+c_8^{3,2}(z_2,z_1,z_2)*e^{x\sqrt{2h}}, & x\in[z_2,1],\end{cases} \qquad (49)$$

$$G^{3,2}(z_2,z_1,\varsigma_2)=c_2^{3,2}(z_2,z_2,z_2)*z_2, \qquad (50)$$

$$G^{3,2}(z_1,\xi,\varsigma_2)=c_2^{3,2}(\xi,z_1,z_2)*z_1.. \qquad (51)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$G^{1,2}(x,z_1,\varsigma_2)=G^{2,2}(x,z_1,\varsigma_2), \qquad G^{2,2}(z_1,z_2,\varsigma_2)=G^{3,2}(z_1,z_2,\varsigma_2),$$

$$G^{2,2}(x,z_2,\varsigma_2)=G^{3,2}(x,z_2,\varsigma_2), \qquad G^{1,2}(z_2,z_1,\varsigma_2)=G^{2,2}(z_2,z_1,\varsigma_2).$$

როცა $\xi = z_1 = z_2$,მაშინ

$$G^{1,2}(x,z_1,\varsigma_2)=G^{2,2}(x,z_1,\varsigma_2)=G^{3,2}(x,z_1,\varsigma_2),$$

$$G^{1,2}(z_1,z_2,\varsigma_2)=G^{2,2}(z_1,z_2,\varsigma_2)=G^{3,2}(z_1,z_2,\varsigma_2),$$

$$G^{1,2}(z_2,\xi,\varsigma_2)=G^{2,2}(z_2,\xi,\varsigma_2)=G^{3,2}(z_2,\xi,\varsigma_2),$$

$$G^{1,2}(x,z_2,\varsigma_2)=G^{2,2}(x,z_2,\varsigma_2)=G^{3,2}(x,z_2,\varsigma_2),$$

$$G^{1,2}(z_2,z_1,\varsigma_2)=G^{2,2}(z_2,z_1,\varsigma_2)=G^{3,2}(z_2,z_1,\varsigma_2),$$

$$G^{1,2}(z_1,\xi,\varsigma_2)=G^{2,2}(z_1,\xi,\varsigma_2)=G^{3,2}(z_1,\xi,\varsigma_2).$$

ანალოგიური მსჯელობით შეიძლება ავაგოთ უფრო მაღალი რიგის ოპერატორული გულებიც. მაღალი რიგის ოპერატორული გულების აგების პროცესი შრომატევადია, სამაგიეროდ მოცემული სასაზღვრო ამოცანისათვის ოპერატორული გულების აგება ხდება ერთხელ და სამუდამოდ. $\xi, z_1, \dots, z_i$ პარამეტრებზე დამოკიდებული ოპერატორული გული წარმოადგენს $i\,!$ რაოდენობა შესაკრებების ჯამს $i+1$ გრინის ფუნქციების ნამრავლის. შევნიშნოთ, რომ ამ მეთოდის გამოყენების დროს მააპროქსიმირებელი პოლინომის რიგის გაზრდისას ყველა წინა საფეხურზე გამოთვლილი გულები უცვლელი რჩება. მიახლოების რიგის გაზრდა ახალი წევრების დამატების გარდა იწვევს მხოლოდ მნიშვნელობათა არის ბადის ბიჯის შემცირებას.

§2.მოდიფიცირებული ოპერატორულ-საინტერპოლაციო მეთოდი.

როგორც ოპერატორული გულების აგების პირდაპირი მეთოდის შემთხვევაში, მოდიფიცირებული მეთოდის ილუსტრაციისთვისაც დაწრლილებით აღვწეროთ $K_1(x,\xi,z_1)$ და $K_2(x,\xi,z_1,z_2)$ოპერატორული გულების აგების პროცესი. გრინის ფუნქცია, რომელიც შედის ნიუტონის ტიპის ოპერატორული საინტერპოლაციო პოლინომის გულების განსაზღვრაში, გავშალოთ h მცირე პარანმეტრის ხარისხებად (h - საინტერპოლაციო ბადის ბიჯი).

ა). გრინის ფუნქცია G(x,$\xi, hH(*-z_1)$) გავშალოთ h-ის ხარისხების მიხედვით

$$G\big(x,\xi,hH(*-z_1)\big)=\sum_{j=0}^{\infty} G_j^{(1)}(x,\xi,z_1)h^j \qquad (61)$$

და ჩავსვათ K_1 გულის განმსაზღვრელ (8) ფორმულაში. $K_1(x,\xi,z_1)$ ოპერატორულ გულს ექნება სახე:

$$K_1(x,\xi,z_1)=-\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial z_1}\mathrm{G}\big(\mathrm{x},\xi,hH(*-z_1)\big)=-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z_1}G_j^{(1)}(x,\xi,z_1)h^{j-1}. \qquad (62)$$

როგორც ცნობილია, გრინის ფუნქცია აკმაყოფილებს (9) სასაზღვრო ამოცანას. ჩავსვათ (9) ფორმულაში გრინის ფუნქციის h-ის მიმართ გაშლილი მწკრივი, და ჩავწეროთ ეს გამოსახულება h-ის მიმართ მრავალწევრის სახით, $G_j^{(1)}, j=0,1,2,\dots$ განსაზღვრისთვის ვღებულობთ ამოცანებს ადრე გამოყენებული ტიპის (იხ.(9)). $\frac{\partial}{\partial z_1}G_j^{(1)}, j=0,1,2,\dots$ გამოსახულებების შემდეგ გვექნება შემდეგი რეკურენტული ფორმულები:

$$G_{i+1}^{(1)}(x,\xi,z_1) = -\int\limits_{z_1}^{1} G(x,\eta,0) * G_i^{(1)}(\eta,\xi,z_1)d\eta, \quad (63)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1} G_{i+1}^{(1)}(x,\xi,z_1) = G(x,z_1,0) * G_i^{(1)}(z_1,\xi,z_1), \qquad i = 0,1,2,\dots; (64)$$

$$G_0^{(1)}(x,\xi,z_1) = G(x,\xi,0) = \begin{cases} x(1-\xi), & 0 \le x \le \xi, \\ \xi(1-x), & \xi \le x \le 1, \end{cases} \frac{\partial}{\partial z_1} G_0^{(1)}(x,\xi,z_1) = 0. \ (65)$$

დაწვრილებით გამოვიწეროთ რამდენიმე კოეფიციენტი ცხადი ფორმით:

$$G_1^{(1)}(x,\xi,z_1) = -\int_{z_1}^{1} G(x,\eta,0) * G(\eta,\xi,0)d\eta = \qquad (67)$$

$$= -\begin{cases} (1-x)(1-\xi)\left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{z_1^3}{3}\right) + \xi(1-x)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3}\right) + x\xi\left(\frac{1}{3} - x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right), \xi \le x, \\ (1-x)(1-\xi)\left(\frac{x^3}{3} - \frac{z_1^3}{3}\right) + x(1-\xi)\left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + x\xi\left(\frac{1}{3} - \xi + \xi^2 - \frac{\xi^3}{3}\right), \xi \ge x, \end{cases}$$

$$G_2^{(1)}(x,\xi,z_1) =$$

$$= \begin{cases} (1-x)(1-\xi)\left[-\frac{1}{30}\xi^5 - \frac{1}{3}z_1^3\left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\left(\frac{1}{3}\xi^3 - \frac{1}{3}z_1^3\right) - \frac{1}{9}z_1^6 + \frac{1}{5}z_1^5\right] + \\ (1-x)(1-\xi)\left[-\frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{3}z_1^3\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + \left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3\right)\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}z_1^3\right) - \frac{1}{9}z_1^6 + \frac{1}{5}z_1^5\right] + \end{cases}$$

$$\begin{cases} +(1-x)\xi * [-\frac{1}{30}\xi^5 + \frac{1}{24}\xi^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}z_1^3 * \left(\frac{1}{3}\xi^3 - \xi^2 + \xi - \frac{1}{3}\right) - \\ +(1-\xi)x * [-\frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{30}\xi^5 - \frac{1}{8}\xi^4 + \frac{1}{9}\xi^3 + \frac{1}{3}z_1^3 * \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3}\right) - \end{cases} (68)$$

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3\right) * \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)] + x(1-\xi) * \frac{1}{9} * (1 - 3x + 3x^2 - x^3)(\xi^3 - z_1^3) + \\ -\left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3\right) * \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)] + \xi(1-x) * \frac{1}{9} * (1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3)(x^3 - z_1^3) + \end{cases}$$

$$\begin{cases} +x * \xi * \left[\frac{1}{45} + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{5}{18}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3\right) * \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3}\right)\right], & \xi \le x, \\ +x * \xi * \left[\frac{1}{45} + \frac{1}{30}\xi^5 - \frac{1}{6}\xi^4 + \frac{5}{18}\xi^3 - \frac{1}{6}\xi^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) * \left(\frac{1}{3}\xi^3 - \xi^2 + \xi - \frac{1}{3}\right)\right], & \xi \ge x. \end{cases}$$

$K_2(x,\xi,z_1,z_2)$-ს განსაზღვრისთვის (გამოვიყენებთ (21) ფორმულას და გრინის ფუნქციის გაშლისას h-ის მიხედვით) მივიღებთ

$$K_2(x,\xi,z_1,z_2) = \frac{1}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} G(x,\xi,\varsigma_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} G_j^{(2)}(x,\xi,z_1,z_2) * h^{j-2}. \quad (69)$$

უცნობიკოეფიციენტებით$\partial^2 G_j^{(2)}(x,\xi,z_1,z_2)/\partial z_1 \partial z_2$ გამოითვლება $\partial G_j^{(1)}(x,\xi,z_1)/\partial z_1$ -ის ანალოგიურად. $G(x,\xi,\varsigma_2)$ გრინის ფუნქცია აკმაყოფილებს (22) სასაზღვრო ამოცანას. თვითონ გრინის ფუნქცია შევცვალოთ h-ის მიმართ გაშლილი მწკრივით, რომლის შედაგადაც მივიღებთ (22) ტიპის სასაზღვრო ამოცანებს $G_j^{(2)}(x,\xi,z_1,z_2)$ -ის

განსაზღვრისთვის, ხოლო შემდეგ მათი გაწარმოებით z_1 დაz_2 ცვლადებით, ვიპოვით $\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} G_j^{(2)}(x, \xi, z_1, z_2)$, $j = 0,1,2, \dots$; გვაქვს შემდეგ ი რეკურენტული ფორმულები:

$$G_{i+1}^{(2)}(x, \xi, z_1, z_2) == -\left\{ \int_{z_1}^{1} G(x, \eta, 0)\, G_j^{(2)}(\eta, \xi, z_1, z_2) d\eta + \int_{z_2}^{1} G(x, \eta, 0)\, G_j^{(2)}(\eta, \xi, z_1, z_2) d\eta \right\}, (70)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} G_{i+1}^{(2)}(x, \xi, z_1, z_2) =$$

$$= G(x, z_1, 0) * \frac{\partial}{\partial z_2} G_i^{(2)}(z_1, \xi, z_1, z_2) + G(x, z_2, 0) * \frac{\partial}{\partial z_1} G_i^{(2)}(z_2, \xi, z_1, z_2)\ , (71)$$

$$i = 0,1,2, \dots;$$

$$G_0^{(2)}(x, \xi, z_1, z_2) = G(x, \xi, 0) = \begin{cases} x(1-\xi), & 0 \le x \le \xi, \\ \xi(1-x), & \xi \le x \le 1. \end{cases} \quad (72)$$

$G_j^2(x, \xi, z_1, z_2)$ კოეფიციენტების აგებისასგამოიყენება ადრე მიღებული $G_j^{(1)}(x, \xi_1, z_1)$ კოეფიციენტები. ამოვწეროთ რამდენიმე კოეფიციენტი ცხადი ფორმით:

$$G_1^{(2)}(x, \xi, z_1, z_2) = -\left\{ \int_{z_1}^{1} G(x, \eta, 0) * G(\eta, \xi, 0) d\eta + \int_{z_2}^{1} G(x, \eta, 0) * G(\eta, \xi, 0 d\eta) \right\}$$

$$= G_1^{(1)}(x, \xi, z_1) + G_1^{(1)}(x, \xi, z_2), \quad (73)$$

$$G_2^{(2)}(x, \xi, z_1, z_2) = 2\left\{ G_2^{(1)}(x, \xi, z_1) + G_2^{(1)}(x, \xi, z_2) - \int_{z_1}^{z_2} G(x, \eta, 0) G_1^{(1)}(\eta, \xi, z_2) d\eta \right\}, (74)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} G(x, \eta, 0) G_1^{(1)}(\eta, \xi, z_2) d\eta =$$

$$\begin{cases} (1-x)(1-\xi)\left[-\frac{1}{30}\xi^5 + \frac{1}{30} z_1^5 + \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3}\right)\frac{z_2^3}{3} - \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3}\right)\frac{z_1^3}{3} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{z_2^3}{3}\right) \right] + \\ (1-x)(1-\xi)\left[-\frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{30} z_1^5 + \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) * \frac{z_2^3}{3} + \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3}\right)\left(\frac{x^3}{3} - \frac{z_1^3}{3}\right) \right] \qquad + \end{cases}$$

$$\begin{cases} +(1-x) * \xi * [-\frac{1}{30}\xi^5 + \frac{1}{24}\xi^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{8}x^4 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3}\right) + \left(\xi - \xi^2 + \frac{\xi^3}{3}\right) * \frac{z_1^3}{3} + \\ +(1-\xi) * x * [-\frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{30}\xi^5 - \frac{1}{8}\xi^4 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3}\right) + \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right) * \frac{z_2^3}{3} + \end{cases}$$

$$\begin{cases} \qquad +\frac{1}{3} * \left(\frac{x^3}{3} - \frac{z_1^3}{3}\right)] + (1-x) * \xi * \left[\left(\frac{1}{3} - \xi + \xi^2 - \frac{\xi^3}{3}\right) * \left(\frac{x^3}{3} - \frac{z_1^3}{3}\right)\right] + \\ +\left(z_2 - z_2^2 + \frac{z_2^3}{3}\right)(\frac{\xi^3}{3} - \frac{z_2^3}{3})] + (1-\xi) * x * [\left(z_2 - z_2^2 + \frac{z_2^3}{3} - x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right) * (\frac{\xi^3}{3} - \frac{z_2^3}{3})] + \end{cases}$$

$$\begin{cases} +x*\xi*[\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{30}z_2^5-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{6}z_2^4+\frac{5}{18}x^3-\frac{5}{18}z_2^5-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}z_2^2- \\ +x*\xi*[\frac{1}{30}\xi^5-\frac{1}{30}z_2^5-\frac{1}{6}\xi^4+\frac{1}{6}z_2^4+\frac{5}{18}\xi^3-\frac{5}{18}z_2^5-\frac{1}{6}\xi^2+\frac{1}{6}z_2^2- \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\left(z_2-z_2^2+\frac{z_2^3}{3}-x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}\right)], & \xi\le x, \\ -\left(z_2-z_2^2+\frac{z_2^3}{3}\right)\left(\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}\right)-\left(1-\xi+\xi^2-\frac{\xi^3}{3}\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)], & \xi\ge x. \end{cases}$$

როგორც ჩვეულებრივ საინტერპოლაციო მიდგომაში, აქ გამოთვლა უფრო მაღალი რიგის ოპერატორული გულების თეორიულად არ წარმოადგენს სირთულეს, მაგრამ იზრდება სამუშაოს მოცულობა(ე.ი. წარმოიქმნება ტექნიკური ხასიათის სიძნელეები).

სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა მოდიფიცირებულ მიდგომაში აიგება ისევე, როგორც პირდაპირი მეთოდის შემთხვევაში. თუმცა ასეთი მიდგომა გარკვეულწილად წინაზე გაუმჯობესებულია, ოპერატორული გულები აგება მხოლოდ G(x,ξ, 0) გრინის ფუნქციის დახმარებით, მაგრამ ეს მიდგომაც არ გვაცილებს განმეორებითი (ჯერადი) ინტეგრალების დათვლის სირთულეს.

§3.სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმები.

(1) სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისთვის გამოვიყენოთ ორი განსხვავებული მეთოდი:

ა).ანალიზური და ბ). დისკრეტული ოპერატორულ-საინტერპოლაციო მეთოდები.

§3.1. სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის ანალიზური ოპერატორულ-საინტერპოლაციო მეთოდი.

პირველად განვიხილოთ ანალიზური ოპერატორულ-საინტერპოლაციო მეთოდი. ახლა დაწვრილებით ავაგოთ (1) სასაზღვრო ამოცანის რამდენიმე მიახლოებითი ამონახსნი. m - ურ მიახლიებით $u_m(x)$ამონახსნს აქვს სახე

$$u_m(x) \;=\; \int_0^1 G_m\big(x,\xi,q(.)\big)\; f(\xi)\, d\xi,$$

სადაც $G_m\big(x,\xi,q(.)\big)$ განისაზღვრება (5) ფორმულით. რადგანაც

$$G_0\big(x,\xi,q(.)\big)= \;G(x,\xi,0)=\begin{cases} x(1-\xi)\,, & 0\le\; x\;\le\xi\,, \\ \xi(1-x)\,, & \xi\le\; x\;\le 1\,, \end{cases} \tag{53}$$

ამიტომ ნულოვანი მიახლოების გამოსათვლელად მივიღებთ

$$u_0(x) \ = \ \int_0^1 G(x,\xi,0)\ f(\xi)\, d\xi = \int_0^{x} \xi(1-x)\ f(\xi)\, d\xi + \int_x^1 x(1-\xi)\ f(\xi)\, d\xi =$$

$$= (1-x)\int_0^{x} \xi\ f(\xi)\, d\xi + \ x\int_x^1 (1-\xi)\ f(\xi)\, d\xi\ , \qquad (54)$$

ე.ი. როცა ნულოვანი მიახლოების (m = 0) საპოვნელად გამოსათვლელი გვაქვს ორი ერთჯერადი ინტეგრალი.

პირველ მიახლოებას (m = 1) აქვს სახე

$$u_1(x) \ = \ \int_0^1 G_1\big(x,\xi,q(.)\big)\ f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_0^1 \left[G(x,\xi,0) + \int_0^1 \ K_1(x,\xi,z_1)q(z_1)\, dz_1\right] f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_0^1 G(x,\xi,0)\ f(\xi)\, d\xi + \int_0^1 \left[\int_0^1 \ K_1(x,\xi,z_1)q(z_1)\, dz_1\right] f(\xi)\, d\xi = \ u_0(x) - \ v_1(x)\,, \quad (55)$$

სადაც

$$v_1(x) = \ -\int_0^1 \left[\int_0^1 \ K_1(x,\xi,z_1)q(z_1)\, dz_1\right] f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \ \int_0^1 \left[\int_0^1 G(x,z_1,\zeta_1)\ G(z_1,\xi,\zeta_1)\ q(z_1)\, dz_1\right] f(\xi)\, d\xi\ . \qquad (56)$$

$K_1(x,\xi,z_1)$ გული განისაზღვრება (12) ფორმულით. შეიძლებოდა აქ შევჩერებულიყავით და აგვეღწერა ინტეგრალქვეშა ფუნქცია რთული ფორმით. მაგრამ თვლის შედეგების უფრო იმედიანობისთვის უკეთესია განვიხილოთ ინტეგრალის დაშლა კერძო შემთხვევებად. აქ ვითვალისწინებთ (15, 16, 19, 20) გრინის ფუნქციის სხვადასხვა სახეს x,ξ,z_1 პარამეტრებს შორის სხვადასხვა დამოკიდებულებების დროს. რადგანაც $v_1(x)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$v_1(x) = \int_0^x \int_0^\xi \dots dz_1 d\xi + \int_0^x \int_\xi^x \dots dz_1 d\xi + \int_0^x \int_x^1 \dots dz_1 d\xi + \int_x^1 \int_0^x \dots dz_1 d\xi +$$

$$+ \int_x^1 \int_x^\xi \dots dz_1 d\xi + \int_x^1 \int_\xi^1 \dots dz_1 d\xi \qquad (57)$$

ე.ი. პირველი მიახლოების (m=1)დროს გვაქვს ჯამი 6 ორჯერადი ინტეგრალის.

მეორე მიახლოებას(m=2) აქვს სახე:

$$u_2(x) = \int_0^1 G_2\big(x,\xi,q(\,.\,)\big) f(\xi) d\xi = \int_0^1 [G(x,\xi,0) + \int_0^1 K_1(x,\xi,z_1)q(z_1)dz_1 +$$

$$+\int_0^1 \int_{z_1}^1 K_2(x,\xi,z_1,z_2)q(z_1)[q(z_2)-h]dz_1dz_2]f(\xi)d(\xi) = u_1(x)+v_2(x), \qquad (58)$$

სადაც

$$v_2(x) = \int_0^1 [\int_0^1 \int_{z_1}^1 K_2(x,\xi,z_1,z_2)q(z_1)[q(z_2)-h]dz_1dz_2]f(\xi)d(\xi) =$$

$$\int_0^1 [\int_0^1 \int_{z_1}^1 [G(x,z_1,\varsigma_2)*G(z_1,z_2,\varsigma_2)*G(z_2,\xi,\varsigma_2)+G(x,z_2,\varsigma_2)*G\left(z_2,z_1,h_{2\varsigma_2}\right)*$$

$$*G(z_1,\xi,\varsigma_2)]q(z_1)[q(z_2)-h]dz_2dz_1f(\xi)d\xi. \qquad (59)$$

$K_2(x,\xi,z_1,z_2)$ გული განისაზღვრება (27) ფორმულით. m=1 შემთხვევის ანალოგიურად $v_2(x)$-ის გამოსათვლელად ვღებულობთ 12 სამჯერადი ინტეგრალის ჯამს

$$v_2(x) = \int_0^x \int_0^\xi \int_{z_1}^\xi \dots d\xi dz_1dz_2 + \int_0^x \int_0^\xi \int_\xi^x \dots d\xi dz_1dz_2 + \int_0^x \int_0^\xi \int_x^1 \dots d\xi dz_1dz_2 +$$

$$+\int_0^x \int_\xi^x \int_{z_1}^x \dots d\xi dz_1dz_2 + \int_0^x \int_\xi^x \int_x^1 \dots d\xi dz_1dz_2 + \int_0^x \int_x^1 \int_{z_1}^1 \dots d\xi dz_1dz_2 + \qquad (60)$$

$$+\int_x^1 \int_0^x \int_{z_1}^x \dots d\xi dz_1dz_2 + \int_x^1 \int_0^x \int_x^\xi \dots d\xi dz_1dz_2 + \int_x^1 \int_x^\xi \int_{z_1}^\xi \dots d\xi dz_1dz_2 +$$

$$+\int_x^1 \int_0^x \int_\xi^1 \dots d\xi dz_1dz_2 + \int_x^1 \int_x^\xi \int_\xi^1 \dots d\xi dz_1dz_2 + \int_x^1 \int_\xi^1 \int_{z_1}^1 \dots d\xi dz_1dz_2,$$

და ა.შ. ზოგად შემთხვევაში $v_i(x)$ -ის გამოსათვლელად გვწირდება $(i+1)(i+2)$ ცალი $(i+1)$ -ჯერადი ინტეგრალის ჯამის პოვნა. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, m-ის გაზრდასთან ერთად არსებითად იზრდება სამუშაოს მოცულობა. აგებულ ფორმულებში $f(x)$ და $q(x)$ ფუნქციები მონაწილეობენ როგორც პარამეტრები.

შენიშვნა: ინტეგრალისწინა ფუნქცია შეიძლება ავღწეროთ როგორც ფინიტური, რის შედეგაც განმეორებითი ინტეგრალები გარდაიქმნებიან ჯერადებათ, ხოლო შემდეგ გამოითვლება მიახლოება კვადრატული ფორმულით.

§3.2. სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის დისკრეტული

ოპერატორულ-საინტერპოლაციო მეთოდი.

ახლა კი განვიხილოთ დისკრეტული ოპერატორულ-საინტერპოლაციო მეთოდი.

(I) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა (2) გრინის ფუნქციის დახმარებით შევცვალოთ მიახლოებითი ფორმილით, რომლის ცდომილება $O(\tau)$ წინასწარ მოცმულია

$$u(x)=\int_0^1 G\big(x,\xi,q(.)\big)f(\xi)d\xi \cong \sum_{i=1}^{n} G(x,x_{i-\frac{1}{2}},q(.))\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi)d\xi, \qquad (76)$$

$$x_i=i*\tau,\ \ \tau=1/n,\ \ x_0=0,\ \ x_n=1.$$

(76) ჯამში შემავალი გრინის $G(x,x_{i-\frac{1}{2}},q(.))$ ფუნქციას შევცვლით m რიგის ნიუტონის ტიპის ოპერატორულ საინტერპოლაციო პოლინომით:

$$G\left(x,x_{i-\frac{1}{2}},q(.)\right)\cong G_m\left(x,x_{i-\frac{1}{2}},q(.)\right)=G\left(x,x_{i-\frac{1}{2}},0\right)-$$

$$-\frac{1}{h}\int_0^1\frac{\partial}{\partial z_1}G\left(x,x_{i-\frac{1}{2}},hH(*-z_1)\right)q(z_1)dz_1+$$

$$+\frac{1}{h^2}\int_0^1\int_{z_1}^1\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}G\left(x,x_{i-\frac{1}{2}},h\sum_{e=1}^{2}H(*-z_e)\right)*q(z_1)[q(z_2-h)]dz_1dz_2+$$

$$+\cdots+\frac{(-1)^m}{h^m}\int_0^1\int_{z_1}^1\dots\int_{z_{m-1}}^1\frac{\partial^m}{\partial z_1\partial z_2\dots\partial z_m}G\left(x,x_{i-\frac{1}{2}},h\sum_{e=1}^{m}H(*-z_e)\right)*$$

$$*q(z_1)[q(z_2-h)]\dots[q(z_m)-(m-1)h]dz_1dz_2\dots dz_m\,. \qquad (77)$$

ინტეგრალები ამ ფორმულაში შევცვალოთ მიახლოებითი გამოსახულებით.

$$G_m\left(x,x_{i-\frac{1}{2}},q(.)\right)\cong G\left(x,x_{i-\frac{1}{2}},0\right)-\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\frac{\partial}{\partial z_1}G\left(x,x_{i-\frac{1}{2}},hH(*-z_1)\right)dz_1*q\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right)$$

$$+\frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j_1=j}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\int_{z_1}^{x_{j_1}}\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}G\left(x,x_{i-\frac{1}{2}},h\sum_{e=1}^{2}H(*-z_e)\right)dz_1dz_2*q\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right)*\left[q\left(x_{j_1-\frac{1}{2}}\right)-h\right]+$$

$$+.\dots+\frac{(-1)^m}{h^m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j_1=j}^{n}\sum_{j_2=j_1}^{n}\dots\sum_{j_{m-1}=j_{m-2}}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\int_{z_1}^{x_{j_1}}\int_{z_2}^{x_{j_2}}\dots\int_{z_{m-1}}^{x_{j_{m-1}}}\frac{\partial^m}{\partial z_1\partial z_2\dots\partial z_m}$$

$$G\left(x,x_{i-\frac{1}{2}},h\sum_{e=1}^{m}H(*-z_e)\right)dz_1dz_2\dots dz_m*q\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right)*\left[q\left(x_{j_1-\frac{1}{2}}\right)-h\right]*\dots*$$

$$*\left[q\left(x_{j_m-\frac{1}{2}}\right)-(m-1)h\right].$$

შენიშვნა: რადგანაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია სიმეტრიულია $z_1, z_2, \dots, z_p (p = 2,3,\dots,m)$პარამეტრების მიმართ, ინტეგრების საზღვრების დამთხვევის დროს

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j}\int_{z_1}^{x_j}\dots\int_{z_{p-1}}^{x_j}\omega(z_1,z_2,\dots,z_p)dz_1dz_2\dots dz_p = \frac{1}{p!}\underbrace{\int_{x_{j-1}}^{x_j}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\dots\int_{x_{j-1}}^{x_j}\omega(z_1,z_2,\dots,z_p)dz_1dz_2\dots dz_p}_{p-ჯერ}.$$

(79)

(p=$\overline{2,m}$).

ელემენტარული გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$G_m\left(x, x_{i-\frac{1}{2}}, q(\,.\,)\right) \cong G\left(x, x_{i-\frac{1}{2}}, 0\right) -$$

$$-\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n}\left[G\left(x, x_{i-\frac{1}{2}}, hH(*-x_j)\right) - G\left(x, x_{i-\frac{1}{2}}, hH(*-x_{j-1})\right)\right] * q\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+\frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{j_1=j+1}^{n}[\,G\left(x, x_{i-\frac{1}{2}}, hH(*-x_j) + hH(*-x_{j_1})\right) -\right.$$

$$G\left(x, x_{i-\frac{1}{2}}, hH(*-x_{j-1}) + hH(*-x_{j_1})\right) - \qquad (80)$$

$$-G\left(x, x_{i-\frac{1}{2}}, hH(*-x_j) + hH(*-x_{j_1-1})\right) + G\left(x, x_{i-\frac{1}{2}}, hH(*-x_{j-1}) + hH(*-x_{j_1-1})\right)] *$$

$$*\left[q\left(x_{j_1-\frac{1}{2}}\right) - h\right] + \frac{1}{2}[G\left(x, x_{i-\frac{1}{2}}, 2hH(*-x_j)\right) - 2G\left(x, x_{i-\frac{1}{2}}, hH(*-x_{j-1}) + hH(*-x_j)\right) +$$

$$\left.+G\left(x, x_{i-\frac{1}{2}}, 2hH(*-x_{j-1})\right)] * \left[q\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right) - h\right]\right\} * q\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right) + \dots +$$

$$+\frac{(-1)^m}{m!}\sum_{j=1}^{n}\{\sum_{j_1=j+1}^{n}\sum_{j_2=j_1+1}^{n}\dots\dots\sum_{j_{m-1}=j_{m-2}+1}^{n}[\dots\dots]\} * q\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right) * \left[q\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right) - h\right] * \dots *$$

$$*\left[q\left(x_{j_m-\frac{1}{2}}\right) - (m-1)h\right].$$

არ წარმოადგენს განსაკუთრებულ სირთულეს გამოვწეროთ შემდეგი $(m > 2)$ მიახლოებითი ოპერატორული საინტერპოლაციო პოლინომის წევრები. როგორც ცნობილია (იხ. [7]), m რიგის ნიუტონის ტიპის ოპერატორულ საინტერპოლაციო პოლინომის ცდომილებას აქვს $O\left(\frac{h^m}{m!}\right)$ რიგი, და $O(\tau)$ სიზუსტის მისაღწევად აუცილებელია მიახლოების წევრების რაოდენობა (ოპერატორული საინტერპოლაციო პოლინომის რიგი - m) ავიღოთ, შემდეგი თანადობის გათვალისწინებით $\frac{h^m}{m!} \sim \frac{1}{n}$, სადაც n - მთელი ნაწილია $\frac{1}{\tau}$ - დან: $\text{n} = \frac{1}{\tau}$.

ხშირად ზოგიერთი პრაქტიკული ამოცანებისთვის საკმარისია ავიღოთ არაუმეტეს მეორე რიგის ოპერატორული პოლინომი. (80) ფორმულაში შემავალი გრინის ფუნქციები შეიძლება დავამზადოთ ადრე მიღებული შედეგების გამოყენებით, კერძოდ, როგორც ჩვეულებრივისთვის (დისკრეტული პირდაპირი მეთოდი), ასევე მოდიფიცირემული მიდგომისთვის (დისკრეტული მოდიფიცირებული მეთოდი).

§4.რიცხვითი ექსპერიმენტები

მოცემული სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისთვის შედგენილია პროგრამული პროდუქტი პროგრამათა სისტემა MATLAB – ზე და რეალიზებულია პერსონალურ კომპიუტერზე. ხშირად ზოგიერთი პრაქტიკული ამოცანებისთვის საკმარისია ავიღოთ არაუმეტეს მეორე რიგის ოპერატორული პოლინომი. სხვადასხვა ტესტური ამოცანებისთვის მიღებულია რიცხვითი შედეგები ამონახსნის ნულოვანი, პირველი და მეორე მიახლოებების.

საილუსტრაციოთ მოვიყვანოთრამდენიმე ტესტური ამოცანა. როგორც პირდაპირ, ასევე მოდიფიცირებულ მოდიფიცირებულ მეთოდში ინტეგრების სიზუსტე $\varepsilon = 0.001$, h - ის ხარისხებად გრინის ფუნქციის გაშლაში აღებული გვაქვს მეორე რიგი, რომელიც განაპირობებს $O(h^2)$სიზუსტეს მოდიფიცირებულ მეთოდში.

Table 1.ტესტური ამოცანა1. ცვლადი კოეფიციენტი $q(x) = 1 + \mathrm{x}^2$, მარჯვენა მხარე $f(x) = -(x^4 - x^3 + x^2 - x - 2)$, ზუსტი ამონახსნი $u(x) = x\,(1 - x)$.

x/u	$u_{Exact}(x)$	$Methods$	$u_0(x)$	$Error$	$u_1(x)$	$Error$	$u_2(x)$	$Error$
0.25	0.1875	DM	0.21018	0.02268	0.16485	0.02265	0.16796	0.01954
		MM	0.21018	0.02268	0.17934	0.00816	0.18130	0.00621

0.50	0.25	DM	0.28333	0.03333	0.22146	0.02854	0.22675	0.02325
		MM	0.28333	0.03333	0.24351	0.00649	0.24712	0.00288
0.75	0.1875	DM	0.21262	0.02512	0.17190	0.01560	0.17644	0.01106
		MM	0.21262	0.02512	0.17768	0.00982	0.18174	0.00576

Table 2.ტესტური ამოცანა2. ცვლადი კოეფიციენტი $q(x) = 1 + \mathrm{x}^2$, მარჯვენა მხარე $f(x) = -(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 3.75x + 075)/\sqrt{x}$, ზუსტი ამონახსნი $u(x) = x\,\sqrt{x}(1-x)$.

$\boldsymbol{x/u}$	$\boldsymbol{u_{Exact}(x)}$	$\boldsymbol{Methods}$	$\boldsymbol{u_0(x)}$	$\boldsymbol{Error}$	$\boldsymbol{u_1(x)}$	$\boldsymbol{Error}$	$\boldsymbol{u_2(x)}$	$\boldsymbol{Error}$
0.25	0.09375	DM	0.10877	0.01502	0.10849	0.01474	0.11093	0.01718
		MM	0.10877	0.01502	0.08600	0.00775	0.08730	0.00645
0.50	0.17678	DM	0.20051	0.02373	0.17939	0.00262	0.18334	0.00657
		MM	0.20051	0.02373	0.17317	0.00361	0.17649	0.00028
0.75	0.16238	DM	0.18145	0.01907	0.16052	0.00186	0.16400	0.00162
		MM	0.18145	0.01907	0.16037	0.00201	0.16396	0.00158

Table 3.ტესტური ამოცანა3. ცვლადი კოეფიციენტი $q(x) = 1 + \mathrm{x}^2$, მარჯვენა მხარე $f(x) = (1 + \pi^2 + x^2)\sin \pi x$, ზუსტი ამონახსნი $u(x) = \sin \pi x$.

$\boldsymbol{x/u}$	$\boldsymbol{u_{Exact}(x)}$	$\boldsymbol{Methods}$	$\boldsymbol{u_0(x)}$	$\boldsymbol{Error}$	$\boldsymbol{u_1(x)}$	$\boldsymbol{Error}$	$\boldsymbol{u_2(x)}$	$\boldsymbol{Error}$

0.25	0.70711	DM	0.79473	0.08762	0.66236	0.04475	0.67183	0.03528
		MM	0.79473	0.08762	0.69647	0.01064	0.70456	0.00254
0.50	1.00000	DM	1.12956	0.12956	0.89629	0.10371	0.91486	0.08514
		MM	1.12956	0.12956	0.95838	0.04162	0.97554	0.02446
0.75	0.70711	DM	0.80384	0.09673	0.65948	0.04762	0.67017	0.03693
		MM	0.80384	0.09673	0.67535	0.03176	0.68856	0.01854

ლიტერატურა

1.Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Интерполяционный метод решения задач идентификации для функциональной системы, описиваемой оператором Урысона.

Докл. АН СССР, 1988, т.300, №6, с. 1332-1336.

2.Makarov V.L., Khlobystov V.V. On the identification of nonlinear operator and its application. Boundary Elements X.V.1; Mathematical and Computational Aspects, Springer-Verlag Berlin Heidelbery, 1987, pp.43-58.

3.Papukashvili A.R. The numerical solution of a two-point boundary value problem with a non-constant coefficient by means of operator interpolation polynomials of the Newton type. Reports of I.N.Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi University Press, Tbilisi 1992. v. 44. p.45-74.

Папукашвили А.Р. Приближенное решение двухточечной краевой задачи с переменным коэффициентом с применением операторных интерполяционных полиномов типа Ньютона. Труды института прикладной математики им. И.Н. ВекуаТГУ. -1992 г. т. 44. -с. 45-74.

4. Papukashvili A.R. The numerical solution of the Dirichlet problem for the circle with a non-constant coefficient by means of operator interpolation polynomials of the Newton type. Reports of I.N.Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi University Press, Tbilisi 1992. v. 44. p.75-85.

Папукашвили А.Р. Приближенное решение задачи Дирихле для круга с переменным коэффициентом с применением ореаторных интерполяционных полиномов типа Ньютона. Труды инс-та прикладной математики им. И.Н. Векуа ТГУ. -1992 г. т. 44. -с. 75-85.

5.Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. –М.:Наука, 1969. -528с.

6.Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С. Фунциональные ряды в теории нелинейных систем. –М.:Наука, 1976. -488с.

7.Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. –М.:Наука, 1976. -576с.

8.Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. –М.:Наука, 1977. -744с.