ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

თამარ ფოფხაძე

ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეები

სამაგისტრო პროგრამა მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია მატემატიკის მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

თემის ხელმძღვანელი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, თსუ-ს სრული

პროფესორი **როლანდ ომანაძე**

თბილისი

2016

სარჩევი

ანოტაცია. მე-20 საუკუნის 40-იან წლებში პოსტმა შემოიტანა ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეების ცნება თავისი პრობლემის გადასაწყვეტად. სიმრავლეთა ეს კლასი მნიშვნელოვან როლს თამაშობს რეკურსიის თეორიაში. ნაშრომში ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეების თვისებები და ცნობილი პოსტის პრობლემის გადაწყვეტაა მოცემული. კერძოდ, ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეები დახასიათებულია ბულის ალგებრის ტერმინებში და წარმოდგენილია ლახლანის შემდეგი თეორემა: უსასრულო დამატების მქონე რ.გ. სიმრავლე C უსასრულო დამატებით ჰიპერჰიპერმარტივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\varepsilon(\bar{C}\ )$ ბულის ალგებრაა, ასევე რ.გ. A სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინაა ჰიპერჰიპერმარტივი, როცა $\bar{A}$ უსასრულოა და ყოველი რ.გ B სიმრავლისათვის, რომლისთვისაც $A \subset B$, $A \cup \bar{B}$ რ.გ-ია; ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეები დახასიათებულია Q-დაყვანადობის ტერმინებში და მოცემულია სოლოვიოვის თეორემები. მათგან ძირითადია შემდეგი: რ.გ. სიმრავლე უსასრულო დამატებით ჰიპერჰიპერმარტივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არაა არცერთი Q-სრული სიმრავლის ქვესიმრავლე. ნაშრომის ბოლო ნაწილში მოცემულია მარჩენკოვის მიერ პოსტის პრობლემის გადაწყვეტა ნახევრადრეკურსიული η -ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეების საშუალებით , რომლის თანახმადაც არცერთი ნახევრადრეკურსიული η -ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე არშეიძლება იყოს სრული ტიურინგის აზრით.

Abstract. In the 40-ies of 20 century Post introduced concept of hyperhypersimple sets for solve his problem. That class of sets plays an important role in the theory of recursion. In this paper are given properties of hyperhypersimle sets and solution of the well-known Post's problem, In particular, there are given Lachlan's theorems about characterization of hyperhypersimple sets with Boolean algebras. One of them is next, r.e. set C with infinite addition is hyperhypersimple if and only if $\varepsilon(\bar{C})$ is Boolean algebra and the r.e. set A is hyperhypersimple if and ony if $\bar{A}$ is infinite and foer every r.e. B, such that $A \subset B$, $A \cup \bar{B}$ is r.e. There are theorems about characterization of hyperhypersimple sets in Q-reducibility terms, the major theorem of them is next, r.e. set with infinite addition is hyerhypersimple if and only if it isn't a subset any Q-complete set. The last part of this paper is given Post's problem's solution by Marchenkow. He showed, that neither semirecursive η –hyperhypersimple set isn't T-complete.

შესავალი

პოსტმა შემოიტანა რეკურსიული და რეკურსიულად გადათვლადი (რ.გ) სიმრავლეების ცნებები. რეკურსიული სიმრავლეებისათვის არსებობს ეფექტური პროცედურა (ალგორითმი), რომლის საშუალებითაც ირკვევა გარკვეული ელემენტი ეკუთვნის თუ არა მოცემულ სიმრავლეს, რაც რეკურსიული სიმრავლის ამოხსნადობას ნიშნავს. რ.გ. სიმრავლეების შემთხვევაში კი საზოგადოდ ასე არაა.

იმისათვის, რომ რ.გ. სიმრავლეები ერთმანეთისთვის შეედარებინა, პოსტმა შემოიტანა ერთი სიმრავლის მეორე სიმრავლეზე დაყვანადობის ცნება. ვიდრე უშუალოდ პრობლემას შევეხებოდეთ, განვსაზღვროთ ზოგიერთი საჭირო ცნება.

ტიურინგის აზრით დაყვანადობა ყველაზე ზოგადი დაყვანადობაა. A სიმრავლე ტიურინგის აზრით დაყვანადია (T - დაყვანადია) B სიმრავლეზე ($A \leq_T B$), თუ A რეკურსიულია B -ში. ამ დაყვანადობის მიმართ შეგვიძლია განვსაზღვროთ A სიმრავლის ტიურინგის ხარისხი (T - ხარისხი), რომელიც A -ს ტიურინგის აზრით ექვივალენტურ სიმრავლეთა სიმრავლეს წარმოადგენს. თუ T - ხარისხი შეიცავს რ.გ. სიმრავლეს, მაშინ ის რეკურსიულად გადათვლადი ტიურინგის ხარისხია.

ყოველი რეკურსიული სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია. პოსტმა აჩვენა რეკურსიულად გადათვლადი არარეკურსიული სიმრავლის არსებობა. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ არსებობს რეკურსიული ტიურინგის ხარისხი და რეკურსიულად გადათვლადი არარეკურსიული ტიურინგის ხარისხი, პირველი ხარისხი მან აღნიშნა $\mathbf{0}$-ით, ხოლო მეორე $\mathbf{0}'$-ით. $\mathbf{0} <_T \mathbf{0}'$.

პოსტმა დასვა შეკითხვა, არსებობდა თუ არა $\mathbf{0}$ და $\mathbf{0}'$ ტიურინგის ხარისხებს შორის რეკურსიულად გადათვლადი ხარისხი. პრობლემის გადასაჭრელად მან შეადგინა პროგრამა. მას უნდოდა რ.გ. სიმრავლეთა ისეთი კლასის გამოყოფა, რომლის არცერთი წარმომადგენელი არ აღმოჩნდებოდა $\mathbf{0}'$-ში. ამ მიზნით პოსტმა რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა დამატებები გარკვეულწილად შეზღუდა, შემოიღო მარტივი სიმრავლის ცნება და აჩვენა მისი არსებობა. მარტივ სიმრავლეთა კლასი $\mathbf{0}'$- ის წარმომადგენელი აღმოჩნდა. ამიტომ ამ სიმრავლეთა კლასი შეავიწროვა და უწოდა ჰიპერმარტივ სიმრავლეთა კლასი. ვერც ამ ტიპის სიმრავლეები გამოდგა შედეგის მომცემი, ამიტომ პოსტმა კიდევ შეავიწროვა ჰიპერმარტივ სიმრავლეთა კლასი და განიხილა ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეები. საბოლოოდ, პოსტის პრობლემა გადაწყდა დადებითად, მაგრამ არცერთი დასახელებული სიმრავლეთა კლასი არ აღმოჩნდა მისი ამოხსნა. მარტივ, ჰიპერმარტივ და ჰიპერჰიპერმარტივ სიმრავლეებს კი როგორც რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეებს, აქვთ ბევრი საინტერესო თვისება. მათი კვლევა დღესაც აქტუალურია. საბოლოოდ, მარჩენკოვმა პოსტის პრობლემა დადებითად გადაწყვიტა. 1971 წელს ი. ერშოვმა შემოიტანა η -ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე და პოზიტიური ექვივალენტობის ცნებები. მარჩენკოვმა აჩვენა, რომ ყოველი

ნახევრადრეკურსიული η -ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე $\mathbf{0}$ და $\mathbf{0}'$ ტიურინგის ხარისხებს შორის მოთავსებულ რეკურსიულად გადათვლად ხარისხს წარმოქმნის.

ნაშრომი ეძღვნება ჰიპერჰიპერმარტივ სიმრავლეთა თვისებებსა და პოსტის პრობლემას. მოყვანილია თეორემები, რომლებიც საშუალებას გვაძლევს ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეები დავახასიათოთ დაყვანადობების, ბულის ალგებრის ტერმინებში, ასევე პოსტის პრობლემის გადაწყეტა. კერძოდ:

მეორე პარაგრაფში მოყვანილია ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეების ექვივალენტური განსაზღვრებები.

მესამე პარაგრაფში მოყვანილია ლახლანის კარგად ცნობილი თეორემის სრული დამტკიცება, რომელიც ჰიპერჰიპერმარტივ სიმრავლეთა დახასიათებას იძლევა ბულის ალგებრის ტერმინებში.

მეოთხე პარაგრაფში მოყვანილია სოლოვიოვის ცნობილი თეორემის სრული დამტკიცება. ეს თეორემა ახასიათებს ჰიპერჰიპერმარტივ სიმრავლეებს Q-სრულ სიმრავლეთა ტერმინებში.

მეხუთე პარაგრაფში მოყვანილია მარჩენკოვის მიერ პოსტის გახმაურებული პრობლემის გადაწყვეტა.

§1. ძირითდი განსაზღვრებები

განსაზღვრება: პრიმიტიულად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასი არის ფუნქციათა უმცირესი კლასი $\mathcal{C}$, რომელიც ჩაკეტილია შემდეგი სქემების მიმართ:

(I) წანაცვლების ფუნქცია, $\lambda x[x+1]$, ეკუთვნის $\mathcal{C}$ -ს.

(II) მუდმივი ფუნქციები, $\lambda x_1 \dots x_m[m]$, ეკუთვნის $\mathcal{C}$ -ს, $0 \le n, m$.

(III) იგივური ფუნქციები(პროექციები), $\lambda x_1 \dots x_n[x_i]$ ეკუთვნის $\mathcal{C}$ -ს, $1 \le n, 1 \le i \le n$.

(IV) (კომპოზიცია) თუ $g_1, g_2, \dots, g_m, h \in \mathcal{C}$, მაშინ

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots g_m(x_1, \dots, x_n))$$

ეკუთვნის $\mathcal{C}$ -ს, სადაც $g_1, g_2, \dots, g_m$ n ცვლადის ფუნქციებია, ხოლო h m ცვლადის ფუნქციაა.

(V) (პრიმიტიული რეკურსია) თუ $g, h \in \mathcal{C}$ და $n \ge 1$, მაშინ f ეკუთვნის $\mathcal{C}$, სადაც

$$f(0, x_2, \dots, x_n) = g(x_2, \dots, x_n),$$

$$f(x_1+1, x_2, \dots, x_n) = h(x_1 f(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n),$$

შესაბამისად, g და h $n-1$ და $n+1$ ცვლადის ფუნქციებია.

განსაზღვრება: ნაწილობრივად რეკრსიულ ფუნქციათა კლასი არის უმცირესი კლასი, რომელიც ჩაკეტილია (I)-(V) და შემდეგი (VI) სქემების მიმართ.ზოგადრეკურსიული (იგივეა რაც რეკურსიული) ფუნქცია ყველგან განსაზღვრული ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციაა (განსაზღვრის არედ ვგულისხმობთ ნატურალურ რიცხვთ სიმრავლეს).

(VI) თუ $\theta(x_1, \dots, x_n)$ $n+1$ ცვლადის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციაა და

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \mu y[\theta(x_1, \dots, x_n, y) \downarrow = 0 \ \& \ (\forall z \le y)[\theta(x_1, \dots, x_n, z) \downarrow]],$$

მაშინ ψ n ცვლადის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციაა.

განსაზღვრება: A სიმრავლის მასასიათებელი ფუნქციაა $C_A(x)$, თუ x A სიმრავლის ელემენტია, $C_A(x) = 1$, წინააღმდეგ შემთხვევაში $C_A(x) = 0$.

განსაზღვრება: სიმრავლეს, რომლის მახასიათებელი ფუნქცია რეკურსიულია, რეკურსიული სიმრავლე ეწოდება.

განსაზღვრება: სიმრავლე, რომელიც ცარიელია ან რეკურსიული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს წარმოადგენს, რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ეწოდება.

განსაზღვრება: D_x სასრული სიმრავლეა, რომელიც წარმოადგენს x-ის ორობით დაშლაში მონაწილე მაჩვენებელთა სიმრავლეს. მაგ: $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$, $D_7 = \{2,1,0\}$.

$W_0, W_1, W_2, \dots$ ყველა რ.გ. სიმრავლე.

განსაზღვრება: A სიმრავლე m დაყვანადია B-ზე ($A \leq_m B$), თუ არსებობს რეკურსიული ფუნქცია f ისეთი, რომ

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

განსაზღვრება: A სიმრავლე 1 დაყვანადია B-ზე ($A \leq_1 B$), თუ არსებობს ურთიერთცალსახა რეკურსიული ფუნქცია f ისეთი, რომ

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

განსაზღვრება: A სიმრავლე იმუნურია თუ,

- A უსასრულოა,
- A არ შეიცავს უსასრულო რ.გ. ქვესიმრავლეს.

განსაზღვრება: რ.გ. სიმრავლე მარტივია, თუ მისი დამატება იმუნურია.

განსაზღვრება: A სიმრავლე ჰიპერიმუნურია, თუ ის უსასრულოა და არ არსებობს რეკურსიული ფუნქცია f ისეთი, რომ ყოველი x -ისა და y -ისათვის

- $x \neq y \Rightarrow D_{f(x)} \cap D_{f(y)} = \emptyset$
- $D_{f(x)} \cap A \neq \emptyset$.

განსაზღვრება: რ.გ. სიმრავლე ჰიპერმარტივია, თუ მისი დამატება ჰიპერიმუნურია.

§ 2. ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეების ექვივალენტური განსაზღვრებები

განსაზღვრება: A ჰიპერჰიპერიმუნური სიმრავლეა, თუ ის უსასრულოა და არ არსებობს რეკურსიული f ფუნქცია ისეთი, რომ ყოველი x და y-ისთვის $(x, y \in \omega)$

- $|W_{f(x)}| < \infty$
- $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$
- $W_{f(x)} \cap A \neq \emptyset$

განსაზღვრება: რ.გ. A ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეა, თუ მისი დამატება ჰიპერჰიპერიმუნურია.

თეორემა [3]. რ.გ. სიმრავლე A უსასრულო დამატებით ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არ არსებობს რეკურსიული ფუნქცია f ისეთი, რომ

- $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} \cap \bar{A} = \emptyset$
- $W_{f(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset$

დამატკიცება: ვთქვათ, ასეთი f არსებობს. ავაგოთ რეკურსიული ფუნქცია g ისეთი, რომ

- $x \neq y \Rightarrow W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset$
- $W_{g(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset$

ამისათვის საკმარისია გამოვთვალოთ $W_{f(x)}$-ები და გამოვრიცხოთ განმეორებები. თუ რომელიმე ნაბიჯზე განვიხილავთ $W_{f(x)}$-ს, მისი ელემენტი რომელიც არ შედიოდა აქამდე აგებულ არცერთ $W_{g(y)}$-ში, მივაკუთნოთ $W_{g(y)}$-ს. თუ

$$x \neq y,\ W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset$$

და რადგან

$$W_{f(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset,$$

გვექნება, რომ

$$W_{g(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset\ .$$

ახლა g -ს საშუალებით ავაგოთ h რეკურსიული ფუნქცია ისეთი, რომ

$$|W_{h(x)}| < \infty.$$

განსვსაზღვროთ $W_{h(x)}$. ყოველ ნაბიჯზე $W_{h(x)}$ -ს მივაკუთვნოთ $W_{g(x)}$ -ის ის ელემენტები, რომლებიც არ არიან აქამდე აგებულ არცერთ $W_{h(y)}$ -სა და A -ში. ვინაიდან

$$W_{g(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset,$$

როცა კი პირველი ელემენტი ამ თანაკვეთისა გამოითვლება $W_{h(x)}$ -ში, გამოთვლა შეწყდება, რის გამოც

$$|W_{h(x)}| < \infty$$

და რადგან თანაკვეთის ელემენტი შედის $W_{h(x)}$ -ში

$$W_{h(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset.$$

■

განსაზღვრება: (i) თუ $\{a_0, a_1 a_2 \dots\}$ A -ს გადანომვრაა განმეორებების გარეშე და φ ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციაა ისეთი, რომ

$$\varphi(a_{n+1}) = a_n$$

და

$$\varphi(a_0) = a_0,$$

მაშინ A რეგრესიულია φ ფუნქციით მოცემული ნუმერაციის მიმართ.

(ii) იმავე პირობებში, თუ გადანომვრა წრფივად დალაგებულია, მაშინ A -ს უწოდებენ რეტრასიულ სიმრავლეს.

__თეორემა (დეკერი)__ [3]. ყოველ უსასრულო რეგრესიულ სიმრავლეს აქვს უსასრულო რეტრასიული ქვესიმრავლე.

დამკიცება: ვთქვათ, A რეგრესიულია φ ფუნქციით. $b_0 = a_0$, b_{n+1} A -ს პირველი ელემენტია, რომელიც b_n -ზე დიდია. $B = \{b_0, b_1 b_2 \dots\}$ უსასრულოა, რადგან A უსასრულოა. იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ რეტრასიული ფუნქცია B -სთვის მოცემულ x -ზე ,ჯერ უნდა შევამოწმოთ $x \in A$? ავაგოთ B -ს საწყისი სეგმენტი b_0-დან x-მდე მონოტონური ზრდით და ვირჩევთ იმ უდიდეს ელემენტს რომელიც x -ს არ აღემატება. თუ $x \in B$, ვქმნით ხელახლა B -ს საწყის სეგმენტს და ვარჩევთ საჭირო ელემენტს. რაც ამტკიცებს თეორემას. ■

<u>თეორემა</u> [3]. უსასრულო დამატების მქონე რ.გ. სიმრავლეებისათვის შემდეგი წინადადებები ექვივალენურია:

- A ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეა;
- $\bar{A}$ არ შეიცავს უსასრულო რეტრასიულ სიმრავლეს;
- $\bar{A}$ არ შეიცავს უსასრულო რეგრესიულ სიმრვლეს.

დამტკიცება: დეკერის თეორემის თანახმად $2 \Rightarrow 3$. ვაჩვენოთ რომ $1 \Rightarrow 2$. დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, რომ $\bar{A}$ შეიცავს B -ს, რომელიც რეტრასიულია φ ფუნქციით. ვივარაუდოთ, რომ

$$\varphi(x) \leq x, \text{ როცა } \varphi(x) \downarrow.$$

ვთქვათ

$$W_{f(n)} = \left\{z : n = \mu(x)(\varphi(z)^{(x)} = \varphi(z)^{(x+1)})\right\}.$$

ამიტომ $W_{f(n)}$ -ები თანაუკვეთია. იქიდან გამომდინარე, რომ B -ს n -ური ელემენტი (B ზრდადობით დალაგეულია) არის $W_{f(n)}$ -ში,

$$W_{f(n)} \cap \bar{A} \neq \emptyset$$

და A არაა ჰიპერჰიპერმარტივი, რაც წინააღმდეგობაა.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $3 \Rightarrow 1$. ვთქვათ, A არაა ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე, f ისეთი რეკურსიული ფუნქციაა, რომ

- $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$
- $W_{f(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset$.

იმისათვის, რომ ეფექტურად ავირჩიოთ z_n,

$$z_n \in W_{f(x)} \cap \bar{A},$$

საჭიროა φ იყოს ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია. თითოეული $W_{f(x)}$ -ის ყოველ ელემენტისთვის გარდა z_n -ისა მოვიქცეთ შემდეგნაირად, φ' -ით $W_{f(0)}$ ავსახოთ z_0-ზე, $W_{f((x,y)+1)}$ კი x-ური ელემენტზე რომელიც გამოითვლება $W_{f(y)}$ -ში. φ' რეგრესირებს სიმრავლეს და ამ პროცესს ინდუქციურად განვსაზღვრავთ:

$$z_0' = z_{0,}$$

და თუ z_n' მე- x ელემენტია, რომელიც გამოითვლება $W_{f(y)}$ -ში, მაშინ

$$z_{n+1}' \in W_{f((x,y)+1)} \cap \bar{A}.$$

■

§ 3. ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეების დახასიათება ბულის ალგებრის ტერმინებში

განსაზღვრება: L სიმრავლეზე განსაზღვრული მესერი $\mathcal{L} = (L; \leq; \vee; \wedge)$ არის ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლე, რომელშიც ნებისმიერ ორ ელემენტს აქვს ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვარი. თუ a და b L -ის ელემენტებია, $a \vee b$ აღნიშნავს a და b-ს ზუსტ ზედა საზღვარს, ხოლო $a \wedge b$ a და b-ს ზუსტ ქვედა საზღვარს. თუ $\mathcal{L}$ შეიცავს ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს, მათ ვუწოდებთ ნულოვან და ერთეულოვან ელემენტებს შესაბამისად. a ელემენტი b ელემენტის დამატებაა, თუ $a \vee b = 1$, ხოლო $a \wedge b = 0$.

განსაზღვრება: მესერი დისტრიბუციულია, თუ მისი ყველა ელემენტი აკმაყოფილებს დისტრიბუციულობის თვისებებს:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

და

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

განსაზღვრება: მესერი არის მესერი დამატებითი, თუ ყოველ ელემენტს აქვს დამატება.

განსაზღვრება: დისტრიბუციული, დამატებით მესერი რომელიც უდიდეს და უმცირეს ელემენტებს შეიცავს ბულის ალგებრაა.

განსაზღვრება: $S \subset \mathbb{N}$ -თვის განვსაზღვროთ $\varepsilon(S)$, S-ის რ.გ. სიმრავლეებთან თანაკვეთისას მიღებული სიმრავლეთა მესერი,

$$\{W \cap S : W - \text{რ.გ-ია}\}.$$

$W \in \varepsilon$ -სთვის, W_S -ით აღვნიშნოთ სიმრავლე $W \cap S$, რომელიც $\varepsilon(S)$ -ის ელემენტია. $\varepsilon(S)$ -ის ელემენტი A_S დამატებითია $\varepsilon(S)$ -ში, თუ არსებობს რ.გ B სიმრავლე ისეთი, რომ

$$A_S \cup B_S = S \text{ და } A_S \cap B_S = \emptyset,$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში A_S არადამატებითია. $\varepsilon(S)$ ბულის ალგებრაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\varepsilon(S)$-ის ყოველი ელემენტი დამატებითია.

განსაზღვრება: ნებისმიერი რ.გ A სიმრავლისათვის განვსაზღვროთ მთავარი ფილტრი $\mathcal{L}(A)$,

$$\mathcal{L}(A) = \{B : A \subset B \;\&\; B \in \varepsilon\}.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ A რ.გ -ია,

$$\mathcal{L}(A) \cong \varepsilon(\bar{A}),$$

რადგან

$$W_l \cup A \leftrightarrow W_l \cap \bar{A}\ .$$

<u>ლემა (ლახლანი)</u> [2]. თუ S უსასრულო სიმრავლეა და $\varepsilon(S)$ ბულის ალგებრაა მაშინ, S ჰიპერჰიპერიმუნურია.

დამტკიცება: ვთქვათ, S არაა ჰიპერჰიპერიმუნური, ე.ი. არსებობს რ.გ სიმრავლეთა მიმდევრობა $\{W_{f(n)}\}_{n\in\omega}$, რომლის თითოეული წევრის თანაკვეთა S -თან არაცარიელია. უნდა მოვძებნოთ რ.გ. სიმრავლე რომელსაც არაცარიელი თანაკვეთა აქვს S -თან, მაგრამ არა დამატებითია $\varepsilon(S)$ -ში.

განვიხილოთ რ.გ. სიმრავლე

$$A = \cup\ \{W_{f(n)} \cap W_n\}_{n\in\omega}$$

(რეკურსიულად გადათვლადობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ A რ.გ. სიმრავლეთა თანაკვეთის გაერთიანებაა.) . შევამოწმოთ A არის თუ არა $\varepsilon(S)$ -ის ელემენტი. იმის გათვალისწინებით რომ ყოველ $W_{f(n)}$ -ს S -თან არაცარიელი თანაკვეთა აქვს, ხოლო რეკურსიის თეორემის თანახმად, f-ის რეკურსიულობის გამო არსებობს ისეთი n, რომ $W_{f(n)} = W_n$,

$$A \cap\ S \neq \emptyset,$$

ე.ი. A $\varepsilon(S)$ -ის ელემენტია. დავუშვათ A დამატებითია $\varepsilon(S)$-ში და მისი დამატებაა

$$B = W_n.$$

ვთქვათ,

$$x \in W_{f(x)} \cap\ S,$$

მაშინ სრულდება ერთ-ერთი

$$x \in A \cap B\ \text{ან}\ x \in \bar{A} \cap \bar{B},$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ B არაა A -ს დამატება, ანუ არა დამატებითია $\varepsilon(S)$ -ში, მივიღეთ წინააღმდეგობა, რაც ამტკიცებს ლემას. ■

<u>თეორემა(ოვინგსი)</u> [2]. ვთქვათ, $C \subseteq B$ რ.გ. სიმრავლეებია, ისეთი, რომ $B - C$ არაკორეკურსიულად გადათვლადია, მაშინ არსებობს თანაუკვეთი რ.გ. სიმრავლეები A_0 და A_1, ისე, რომ :

(1) $B = A_0 \cup A_1$,
(2) $A_i - C$ არაკორეკურსიულად გადათვლადია, $i = 0,1$ -თვის.

<u>თეორემა(ლახლანი)</u> [2]. რ.გ. სიმრავლე C უსასრულო დამატებით ჰიპერჰიპერმარტივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\varepsilon(\bar{C}\,)$ ბულის ალგებრაა. (რაც ექვივალენტურია იმისა, რომ $\mathcal{L}(C)$ ბულის ალგებრაა.)

დამტკიცება: $\Rightarrow$ დავუშვათ, რომ $C \subseteq B$, B რ.გ. და ის არადამატებითია $\mathcal{L}(C)$ -ში, რაც იმას ნიშნავს, რომ სხვაობა $B - C$ არა კო-რ.გ. დავუშვათ $\mathcal{L}(C)$ არაა ბულის ალგებრა და ვაჩვენოთ, რომ $\bar{C}$ არაჰიპერჰიპერიმუნურია. გამოვიყენოთ ოვინგსის გაყოფის თეორემა, რომ მივიღოთ $\bar{C}$ -თან თანაკვეთილი ურთიერთარათანამკვეთი რ.გ სიმრავლეთა

$$\{W_{f(n)}\}_{n\in\omega}$$

მიმდევრობა. B და C -სთვის გაყოფის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ A_0 და A_1 სიმრავლეებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს

$$B = A_0 \cup A_1\ ,$$

$A_0 - C$ და $A_1 - C$ არა კო-რ.გ, ე.ი. A_0 და A_1 არ არიან $\mathcal{L}(C)$-ს ელემენტები.სიმრავლე

$$W_{f(0)} = A_0,$$

ხოლო A_1-ისათვის და $C \cap A_1$-თვის გამოვიყენოთ გაყოფის თეორემა, რომ მივიღოთ A_0^1 და A_1^1 სიმრავლეები. სიმრავლე

$$W_{f(1)} = A_0^1,$$

A_1^1 -ისა და $C \cap A_1^1$ -ისათვის გამოვიყენოთ გაყოფის თეორემა და ა.შ. ასეთნაირად აგებული სიმრევლეთა მიმდევრობა

$$\{W_{f(n)}\}_{n\in\omega}$$

რ.გ -ია, წყვილ-წყვილად არათანამკვეთია და

$$W_{f(n)} \cap \bar{C} \neq \emptyset$$

ყოველი n-თვის.

$\Leftarrow$ თეორემის ეს ნაწილი დამტკიცებულია წინა ლემაში. ■

<u>თეორემა(ლახლანი)</u> [1]. ვთქვათ, A და B რ.გ სიმრავლეებია და $A \subset B$. თუ $B - A$ ჰიპერჰიპერიმუნურია, მაშინ არსებობს რეკურსიული სიმრავლე C ისეთი, რომ

$$B - A \subset C \subset B.$$

დამტკიცება: ავაგოთ რ.გ სიმრავლეები $S_0, S_1, S_2 \dots$. $S_i^{(n)}$ მიიღება S_i სიმრავლის გადათვლის n ნაბიჯის შედეგად, A და B სიმრავლეებისთვისაც ასევე განისაზღვრება $A^{(n)}$ და $B^{(n)}$.

ნაბიჯი $n+1$. ვიპოვოთ უმცირესი y ისეთი, რომ

$$y \in B^{(n+1)} - A^{(n+1)} ,$$

ამასთან ყოველი i- სთვის

$$y \notin S_i^{(n)}$$

და რომელიმე j' -თვის, რომლისთვისაც

$$S_{j'}^{(n)} \subset A^{(n+1)} , y > \max_{j' > i} | S_i^{(n)} |.$$

თუ ასეთი y არ არსებობს გადავიდეთ $n+2$ ნაბიჯზე. თუ ასეთი y არსებობს, ავიღოთ j, რომელიც j'-ებიდან ყველაზე მცირეა და განვსაზღვროთ

$$S_j^{(n+1)} = S_j^{(n)} \cup \{y\} \text{ და } S_i^{(n+1)} = S_i^{(n)}$$

ყოველი განსხვავებული i და j -თვის. შემდეგ გადავიდეთ $n+2$ ნაბიჯზე.

შევნიშნოთ, რომ ყოველ ნაბიჯზე,ყოველი i-სთვის, S_i შეიცავს $B - A$ სიმრავლის არაუმეტეს ერთ ელემენტს. დავუშვათ, რომ ნებისმიერი S_i სასრულია. ვინაიდან $B - A$ უსასრულოა, მოცემულმა კონსტრუქციამ $B - A$ -დან უნდა მოგვცეს ელემენტები თითოეული S_i -თვის, მაგრამ მაშინ გარკვეული რეკურსიული f-ისთვის მიმდევრობა

$$\{ S_i\}_{i=0}^{\infty} \ (= \{ W_{f(i)}\}_{i=0}^{\infty})$$

უარყოფს $B - A$ სიმრავლის ჰიპერჰიპერიმუნურობას. ახლა ვთქვათ, k უმცირესი ისეთი i არის, რომლისთვისაც S_i უსასრულოა. აგების თანახმად

$$S_k \subset A.$$

ვთქვათ,

$$\mathrm{m} = \max_{i < k} | S_i |.$$

იმ მომენტიდან დაწყებული, როცა ყველა სასრული სიმრავლე S_i -ები, სავსებით იქნება გადათვლილი, ყოველი ახალი რიცხვი y, რომლისთვისაც

$$y > \mathrm{m}$$

და $y \in B - A$ მოხვდება რომელიმე S_j -ში $j > k$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში y მოხვდებოდა S_i-ში . დავუშვათ,

$$C' = \cup_{i \neq k} S_i.$$

მაშინ

$$C' \subset B, (B-A) - C'$$

სასრულია. ვაჩვენოთ, რომ C' რეკურსიულია. იმისათვის, რომ შევამოწმოთ ნებისმიერი მოცემული რიცხვი z ეკუთვნის თუ არა C'-ს, ვიმოქმედოთ შემდეგნაირად. ვაკვირდებით, შედის თუ არა z სასრულ სიმრავლეში

$$\cup_{i<k} S_i.$$

თუ შედის, მაშინ

$$z \in C',$$

თუ არა, ვიწყებთ S_i-ს გადათვლას მანამ, ვიდრე z რაოდენობა ელემენტებისა არ აღმოჩნდება S_k-ში. თუ ამ მომენტისთვის z აღმოჩნდება რომელიმე S_j -ში, $j > k$, მაშინ გვაქვს

$$z \in C',$$

თუ არა, მაშინ აგებით

$$z \notin C'.$$

დავუშვათ

$$C = (B-A) \cup C',$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. ■

<u>თეორემა(ლახლანი)</u> [1]. რ.გ A სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინაა ჰიპერჰიპერმარტივი, როცა $\bar{A}$ უსასრულოა და ყოველი რ.გ B სიმრავლისათვის, რომლისთვისაც $A \subset B$, $A \cup \bar{B}$ რ.გ.

დამტკიცება: $\Rightarrow$ ვთქვათ, A ჰიპერჰიპერმარტივია, $A \subset B$, B რ.გ-ია. თუ $B - A$ სასრულია, მაშინ

$$A \cup \bar{B}$$

კოსასრულია, რაც ნიშნავს

$$A \cup \bar{B}$$

რ.გ-ობას. თუ $B - A$ უსასრულოა, მაშინ ჰიპერჰიპერიმუნურია, ვინაიდან ჰიპერჰიპერიმუნური სიმრავლის უსასრულო ქვესიმრავლეა. წინა თეორემის თანახმად არსებობს რეკურსიული C სიმრავლე, ისეთი, რომ

$$B - A \subset C \subset B, \text{ე.ი. } A \cup \bar{B} = A \cup \bar{C}.$$

C სიმრავლის რეკურსიულობის გამო,

$$A \cup \bar{B}$$

რ.გ-ია.

$\Leftarrow$ ვთქვათ, A რ.გ -ია, $\bar{A}$ უსასრულოა, მაგრამ A არაა ჰიპერჰიპერიმუნური. არაჰიპერჰიპერ იმუნურობიდან გამომდინარე, არსებობს რეკურსიული f ფუნქცია ისეთი, რომ

$$(\forall x)[W_{f(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset]$$

და

$$(\forall x)(\forall y)[x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset].$$

ვთქვათ,

$$B = A \cup (\bigcup_{x \in \mathbb{N}} W_x \cap W_{f(x)})$$

და

$$A \cup \bar{B}$$

რ.გ-ია, ანუ

$$A \cup \bar{B} = W_y .$$

f -ის გამო. გვაქვს,

$$W_{f(y)} \cap \bar{A} \neq \emptyset.$$

ავიღოთ,

$$z \in W_{f(y)} \cap \bar{A} .$$

თუ

$$z \in \bar{B} \Rightarrow W_y \cap W_{f(y)} \Rightarrow z \in B - A.$$

პირიქით, თუ

$$z \in B - A \Rightarrow \left(x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset\right)$$

$$z \in W_y \cap W_{f(y)} \Rightarrow z \in \mathbb{N} - B.$$

რადგან

$$z \in \bar{A},$$

მივიღებთ წინააღმდეგობას. ■

§4. ჰიპერჰიპერმარტივ სიმრავლეთა დახასიათება Q- დაყვანადობის ტერმინებში

განსაზღვრება: A სიმრავლე Q დაყვანადია B სიმრავლეზე, თუ არსებობს რეკურსიული ფუნქცია f ისეთი, რომ ყოველი x-თვის

$$x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B.$$

განსაზღვრება: A სიმრავლე $1-1Q$ დაყვანადია B სიმრავლეზე, თუ არსებობს რეკურსიული ფუნქცია f ისეთი, რომ

$$(\forall u)(\forall v)\big(u \neq v \Rightarrow W_{f(u)} \cap W_{f(v)} = \emptyset\big)$$

და

$$x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B.$$

განსაზღვრება: A სიმრავლე Q- სრულია თუ, A რ.გ. და ყოველი რ.გ. სიმრავლე მასზე Q-დაყვანადია .

განსაზღვრება: სიმრავლე კრეატიულია, თუ რ.გ.-ია და არსებობს ისეთი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ ისეთი, რომ

$$(\forall u)(W_u \subset \overline{K} \Rightarrow (\,\psi(u) \uparrow \,\&\, \psi(u) \in \overline{K} \setminus W_u).$$

თეორემა(სოლოვიოვი) [5]. რ.გ სიმრავლე უსასრულო დამატებით ჰიპერჰიპერმარტივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არაა არცერთი $1-1Q$ სრული სიმრავლის ქვესიმრავლე.

დამტკიცება: $\Leftarrow$ ვთქვათ, A არაჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეა უსასრულო დამატებით. ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს რეკურსიული ფუნქცია f ისეთი, რომ

$$(\forall u)(\forall v)[u \neq v \Rightarrow\ W_{f(u)} \cap W_{f(v)} = \emptyset](\forall u)(W_{f(u)} \cap \bar{A} \neq \emptyset).$$

ვთქვათ, K კრეატიული, ხოლო C ნებისმიერი რ.გ სიმრავლეა. განვსაზღვროთ სიმრავლე B,

$$B = A \cup \left(\bigcup_{x \in K} W_{f(x)} \right)$$

და ვაჩვენოთ, რომ B $1-1Q$ სრული სიმრავლეა. რადგან K 1- სრული სიმრავლეა, ე.ი. არსებობს რეკურსიული ფუნქცია g ისეთი, რომ

$$x \in C \Leftrightarrow g(x) \in K.$$

განმარტების გამო, თუ

$$g(x) \in K$$

$$W_{f(g(x))} \subset \left(A \cup \left(\bigcup_{x \in K} W_{f(x)} \right) \right)$$

$$C \leq_{1-1Q} K,$$

ე.ი.

$$x \in C \Leftrightarrow W_{f(g(x))} \subseteq B.$$

რადგან g ურთიერთცალსახაა $W_{f(g(x))}$-ები არათანამკვეთია და

$$x \in C \Leftrightarrow g(x) \in K \Leftrightarrow W_{f(g(x))} \subseteq B,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$C \leq_{1-1Q} B.$$

C სიმრავლის ნებისმიერობის გამო, B $1-1Q$ სრულია.

$\Rightarrow$ ვთქვათ, D ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეა, ხოლო E $1-1Q$ სრული სიმრავლეა ისეთი, რომ

$$D \subseteq E,$$

K კრეატიული სიმრავლეა და

$$K \leq_{1-1Q} E$$

რეკურსიული h ფუნქციით. ვთქვათ, უსასრულო რეკურსიული სიმრავლე

$$R \subset \overline{K}.$$

თუ

$$x \in R \Rightarrow W_{h(x)} \cap \bar{E} \neq \emptyset$$

იმის გამო, რომ

$$K \leq_{1-1Q} E \ (\Rightarrow W_{h(x)} \cap \overline{D} \neq \emptyset).$$

განვიხილოთ რეკურსიული ფუნქცია $k(x)$, რომლისთვისაც

$$W_{k(x)} = W_{h(r_x)},$$

სადაც r_x ზრდადობით დალაგებული R სიმრავლის მე- x ადგილზე მდგომი ელემენტია. რეკურსიული ფუნქცია $k(x)$ განსხვავებულ x -ებს არათანამკვეთ $W_{h(r_x)}$-ებს უსაბამებს, მათ $\bar{D}$ -თან არაცარიელი თანაკვეთა აქვთ, რაც ეწინააღმდეგება D სიმრავლის ჰიპერჰიპერმარტივობას. ■

განსაზღვრება: A სიმრავლე Q_k დაყვანადია B სიმრავლეზე, თუ არსებობს რეკურსიული ფუნქცია f ისეთი, რომ ყოველი x-თვის

$$(\forall x)\left(\left|W_{f(x)}\right| < \infty\right)(x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B).$$

თეორემა (სოლოვიოვი) [5]. ვთქვათ, A და B რ.გ. სიმრავლეებია,

$$A \leq_{Q_k} B \Leftrightarrow A \leq_Q B.$$

დამტკიცება: ნათელია, რომ

$$A \leq_{Q_k} B \Rightarrow A \leq_Q B.$$

ვაჩვენოთ პირიქით:

$$A \leq_Q B \Rightarrow A \leq_{Q_k} B.$$

ვთქვათ,

$$x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B.$$

განვახორციელოთ $W_{f(x)}$ "ჩამოჭრის" შემდეგი პროცესი. გამოვითვალოთ $W_{f(x)}$-ის პირველი ელემენტი და ვნახოთ ის გამოითვლება თუ არა B-ში (ერთდროულად ვითვლით A და B სიმრავლეებს). თუ გამოითვლება, მაშინ ვითვლით $W_{f(x)}$ -ის მეორე ელემენტს და ა.შ. პროცესი შეწყდება თუ რომელიმე მომენტისათვის x გამოითვლება A- ში ან რომელიმე რიცხვი $W_{f(x)}$ -დან არ იქნება B -ს ელემენტი. ამ მომენტისათვის გამოთვლილი გვექნება $W_{f(x)}$ -ის სასრული რაოდენობის ელემენტი. არსებობს რეკურსიული ფუნქცია $g(x)$ ისეთი, რომ $W_{g(x)}$ შედგება ამ ელემენტებისაგან. რაც ნიშნავს იმას, რომ $A \leq_{Q_k} B$ g ფუნქციით. ■

თეორემა (სოლოვიოვი) [5]. რ.გ. სიმრავლე უსასრულო დამატებით ჰიპერჰიპერმარტივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არაა არცერთი Q_k სრული სიმრავლის ქვესიმრავლე.

დამტკიცება: $\Leftarrow$ ვთქვათ, A არაა ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე, ე.ი. არსებობს რეკურსიული ფუნქცია g ისეთი, რომ

$$(\forall x)[W_{g(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset]\&(\forall x)(\forall y)[x \neq y \Rightarrow \ W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset].$$

ვთქვათ, K კრეატიული სიმრავლეა,

$$K = \{x : x \in W_x\}.$$

$$B = A \cup (\bigcup_{x \in K} W_{g(x)})$$

-Q_k სრულია. თუ C ნებისმიერი რ.გ სიმრავლეა,

$$\mathrm{C} \leq_1 K$$

$h(x)$ -ით.

ანუ

$$x \in \mathrm{C} \Leftrightarrow h\,(x) \in K.$$

თუ

$$h\,(x) \in K \Leftrightarrow W_{g(h(x))} \subset B$$

იმის გამო,

$$x \neq y \Rightarrow W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset,$$

რომ და ამიტომ $W_{g(h(x))}$ -ები ურთიერთარათანამკვეთია.

$$x \in \mathrm{C} \Leftrightarrow h\,(x) \in K \Leftrightarrow W_{g(h(x))} \subset B$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\mathrm{C} \leq_{Q_k} B.$$

$\Rightarrow$ პირიქით, ვთქვათ ჰიპერჰიპერმარტივი A სიმრავლე Q_k სრული B სიმრავლის ქვესიმრავლეა. მაშინ

$$K \leq_{Q_k} B$$

f -ით. ვთქვათ,

$$a \in \overline{K},$$

მაშინ

$$W_{f(a)} \cap \overline{B} \neq \emptyset.$$

ავაგოთ, M სიმრავლე.

ნაბიჯი 0 :

$$M_0 = \emptyset$$

ნაბიჯი $n + 1$:

$$M_{n+1} = \{\, x |\, x \leq n + 1 \,\&\, W_{f(x)}^{(n+1)} \cap (W_{f(a)}^{(n+1)} \backslash B^{(n+1)}) \neq \emptyset \,\}.$$

$$M = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n.$$

$W_{f(a)}$ სასრულია, ამიტომ რომელიმე n -თვის ,

$$W_{f(a)}^{(n+1)} - B^{(n+1)} \subseteq \bar{B}$$

და დაწყებული ამ მომენტიდან $M_{n+1}(i \geq 1)$ -ს ეკუთვნის $\bar{K}$- ის მხოლოდ ის ელემენტები, რომელთათვისაც

$$W_{f(x)} \cap W_{f(a)} \cap \bar{B} \neq \emptyset .$$

M სიმრავლე რ.გ-ია. ვთქვათ, მისი ნომერია n_0.

ავაგოთ, M_1 სიმრავლე. გადავცეთ n_0 M_1-ში. თუ M-ის გადათვლაში შეგვხვდება n_0, მაშინ n_1 გადავთცეთ M_1-ში, სადაც n_1 სიმრავლე $M \setminus \{n_0\}$ -ის ნომერია და ა.შ. თუ M_1-ში უკვე არის $n_0, n_1, \dots, n_k$ და $n_k \in M$, მაშინ M_1 ნომრით n_{k+1} იქნება სიმრავლე $M \setminus \{n_0, n_1, \dots, n_k\}$. M_1 სასრულია. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში

$$(\exists n_p)\left(W_{n_p} = M \setminus \{n_0, n_1, \dots, n_{p-1}\} \& n_p \in M \cap \bar{K}\right),$$

მაგრამ თუ

$$n_p \notin W_{n_p},$$

M_1-ის გადათვლის პროცესი შეწყდება. M_1 სასრულია,

$$M_1 \cap \bar{K} \neq \emptyset$$

და

$$M_1 \cap M \cap \bar{K} = \emptyset .$$

განვსაზღვროთ, სიმრავლეთა მიმდევრობა $W_{g(0)}, W_{g(1)}, \dots$.

$$W_{g(0)} = W_{f(a)};$$

$$W_{g(1)} = \bigcup_{n_i \in M} W_{f(n_i)}.$$

ვთქვათ, n' M_1-ის ისეთი ელემენტია, რომ M_1-ის გადათვლა n' ნაბიჯზე წყდება, მაშინ

$$W_{f(n')} \cap \bar{B} \neq \emptyset \ (n' \in \bar{K})$$

და

$$W_{f(n')} \cap W_{f(a)} \cap \bar{B} = \emptyset \ (n' \in \bar{M}),$$

დანარჩენი n_i-ები ეკუთვნიან M_1-ს.

$$n_i \in K,$$

მაშინ

$$W_{f(n_i)} \subseteq B.$$

გვაქვს,

$$W_{g(0)} \cap W_{g(1)} \cap \bar{B} = \emptyset,$$

$$W_{g(0)} \cap \bar{B} \neq \emptyset,$$

$$W_{g(1)} \cap \bar{B} \neq \emptyset.$$

$W_{g(2)}$ -ის ასაგებად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ზემოთაღწერილი პროცესი, თუ $W_{f(a)}$-ს ნაცვლად

$$W_{g(0)} \cup W_{g(1)}\text{- ს}$$

ავიღებთ. შემდეგ $W_{f(a)}$-ს ნაცვლად ავიღოთ

$$W_{g(0)} \cup W_{g(1)} \cup W_{g(2)},$$

ავაგოთ $W_{g(3)}$ და ა.შ. მიღებულ სიმრავლეთა

$$\{W_{g(i)}\}_{i=0}^{\infty}$$

მიმდევრობას აქვს შემდეგი თვისებები:

$$(\forall i)[W_{g(i)} \cap \bar{B} \neq \emptyset]\&(\forall i)(\forall j)[i \neq j \Rightarrow \ W_{g(i)} \cap W_{g(j)} \cap \bar{B} = \emptyset].$$

გამოვიყენოთ მაკლოხლინის ცნობილი თეორემა, რომლის თანახმადაც ნებისმიერი ეფექტური მიმდევრობისათვის

$$\{W_{\alpha(i)}\}_{i=0}^{\infty}$$

(ე.ი. $\alpha(i)$ რეკურსიული ფუნქციაა) არსებობს რეკურსიული ფუნქცია β ისეთი, რომ

- $(\forall i)\big(\forall\, W_{\beta(i)} \subseteq \ W_{\alpha(i)}\big)$
- $(i \neq j) \Rightarrow \big(W_{\beta(i)} \cap W_{\beta(j)} = \emptyset\big)$
- $\cup\ \{W_{\beta(i)}\}_{n\in\omega} = \cup\ \{W_{\alpha(i)}\}_{n\in\omega}$

და ავაგოთ სიმრავლეთა მიმდევრობა

$$\{W_{h(i)}\}_{i=0}^{\infty},$$

რომელიც დააკმაყოფილებს პირობას

$$(\forall i)(\ W_{h(i)} \cap \bar{B} \neq \emptyset)$$

და

$$(\forall i)(\forall j)\,(i \neq j \Rightarrow\ W_{h(i)} \cap W_{h(j)} = \emptyset).$$

ასეთი მიმდევრობის არსებობა ამტკიცებს იმას, რომ A არაჰიპერჰიპერმარტივია, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას. ■

<u>თეორემა(სოლოვიოვი)</u> [5]. რ.გ. სიმრავლე უსასრულო დამატებით ჰიპერჰიპერმარტივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არაა არცერთი Q-სრული სიმრავლის ქვესიმრავლე.

დამტკიცება: ამ თეორემის მტკიცება გამომდინარეობს წინა ორი თეორემიდან. ■

§5. ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეების როლი პოსტის პრობლემის გადაწყვეტაში

განსაზღვრება: სიმრავლე ნახევრადრეკურსიულია თუ არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია $g(x,y)$ (შერჩევის ფუნქცია B -სიმრავლისათვის), რომ

$$(\forall x)(\forall y)\ [g(x,y) \in \{x,y\}\ \&\ (\{x,y\} \cap B \neq \emptyset \Rightarrow g(x,y) \in B)].$$

განსაზღვრება: $< x, y, u, v >$ თავსებადია, თუ

$$D_u \cap\ D_v = \emptyset;$$

$< x_1, y_1, u_1, v_1 >$ და $< x_2, y_2, u_2, v_2 >$ შეთანხმებულია, თუ

$$D_{u_1} \cap\ D_{v_1} = D_{u_2} \cap\ D_{v_2} = \emptyset.$$

განსაზღვრება: W_z რეგულარულია, თუ

(1) $< x, y, u, v > \in W_z \Rightarrow < x, y, u, v >$ თავსებადია,
(2) $< x, y_1, u_1, v_1 > \in W_z\ \&\ < x, y_2, u_2, v_2 > \in W_z$

და

$$< x, y_1, u_1, v_1 > \neq < x, y_2, u_2, v_2 >$$

$\Rightarrow < x, y_1, u_1, v_1 >$ და $< x, y_2, u_2, v_2 >$ არ არის შეთანხმებული.

ლემა [4]. ვთქვათ B ნახევრადრეკურსიული რ.გ. სიმრავლეა, $B \neq \mathbb{N}$, $B \neq \emptyset$, A რ.გ. სიმრავლეა და

$$A \leq_T B,$$

მაშინ

$$A \leq_Q B.$$

დამტკიცება: იმის გამო, რომ

$$A \leq_T B,$$

მოიძებნება რ.გ. რეგულარული სიმრავლე V. ისეთი, რომ

$$\{< x, C_A(x) >\} = \{< x, y >: (\exists u)(\exists v)[< x, y, u, v > \in V\ \&\ D_u \subseteq B\ \&\ D_v \subseteq \bar{B}]\}. \qquad (1)$$

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ ნებისმიერი ოთხეულისათვის

$$< x, y, u, v >$$

V -დან

$$D_u \neq \emptyset,$$

$$D_v \neq \emptyset.$$

ვთქვათ $g(x, y)$ B სიმრავლის შერჩევის რეკურსიული ფუნქციაა. ვიტყვით, რომ

$$x \leq_g y,$$

თუ

$$g(x, y) = y.$$

ნებისმიერი სასრული სიმრავლისათვის

$$\{d_0, \dots, d_n\}$$

შეგვიძლია ეფექტურად წარმოვქმნათ ტრანზიტული დალაგების მიმართება და ამის შემდეგ ეკვივალენტური ელემენტების გაერთიანებით მიღებული კლასები შექმნიან წრფივად დალაგებულ ექვივალენტობის კლასთა სიმრავლეს. ამ პროცედურის გათვალისწინებით, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ სიმრავლე

$$\{d_0, \dots, d_1\}$$

დალაგებულია $\leq_g$- ის მიმართ, ამას ადასტურებს შემდეგი :

$$d_0 \leq_g d_1 \leq_g \dots \leq_g d_n,$$

ეს კი ნიშნავს იმას, რომ

$$d_i \in B\text{-დან}$$

გამომდინარეობს

$$d_{i+1} \in B.$$

ამიტომ ყოველი ოთხეულისათვის

$$< x, y, u, v > \ V \text{ -დან}$$

D_u, D_v შეგვიძლია შევცვალოთ მინიმალური და მაქსიმალური ელემენტებით შესაბამისად, $\leq_g$- ის მიმართ, ისე, რომ არ დაირღვეს T- დაყვანადობა. მივიღებთ რ.გ. სიმრავლეს W-ს, რომელსაც გააჩნია (1) თვისება. ყოველი ოთხეულისათვის W- დან u და v ერთელემნტიანი D_u და D_v სიმრავლეების ელემნტებია, ისინი არაა ნომრები. ახლა ვაჩვენოთ, x -ის მიხედვით როგორ ვიპოვოთ სასრული ან ცარიელი $W_{f(x)}$ -ის ნომერი ეფექტურად, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობას :

$$(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B].$$

ავიღოთ ნებისმიერი x და გამოვთვალოთ A, B და W სიმრავლეები. W სიმრავლეში მოვძებნოთ ისეთი ოთხეული

$$< x, 0, u, v > ,$$

რომ

$$u \in B.$$

თუ ასეთი ოთხეული მოიძებნება, გამოვთვალოთ v $W_{f(x)}$-სიმრავლეში. თუ აღმოჩნდება, რომ

$$v \in B,$$

მოვძებნოთ ახალ ოთხეული

$$< x, 0, u', v' > \ W\text{- დან ისე,}$$

რომ

$$u' \in B$$

და შემდეგ გამოვთვალოთ v' $W_{f(x)}$-სიმრავლეში და ა.შ. პროცესი შეწყდება თუ აღმოჩნდება, რომ

$$x \in A.$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა იმისათვის, რომ დავრწმუნდეთ $W_{f(x)}$ აკმაყოფილებს პირობას:

$$(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B].$$

1) $x \notin A$. W სიმრავლის გამოთვლის პროცესში, (1) თვისების ძალით აუცილებლად

აღმოვაჩენთ ოთხეულს

$$< x, 0, u, v >,$$

რომლისთვისაც

$$u \in B,$$

ხოლო

$$v \in \bar{B}.$$

აქედან გამომდინარე შესაბამის ეტაპზე $W_{f(x)}$ სიმრავლეში გამოითვლება v, $W_{f(x)}$ ის გამოთვლის პროცესი შეწყდება,

$$v \notin B$$

და

$$x \notin A.$$

2) $x \in A$. ამის გამო, ნებისმიერი

$$< x, 0, u, v >$$

ოთხეულისათვის W- დან,

$$u \in B$$

-დან აუცილებლად

$$v \in B,$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში (2) -ის გამო გვექნება

$$x \notin A.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ იმ მომენტამდე, სანამ არ აღმოვაჩენთ

$$x \in A,$$

უნდა გავაგრძელოთ $W_{f(x)}$ სიმრავლის მხოლოდ იმ ელემეტების გამოთვლა რომლებიც B -ს ეკუთვნის, ე.ი.

$$W_{f(x)} \subseteq B.$$

ლემა დამტკიცებულია. ■

<u>**განსაზღვრება:**</u> ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ ექვივალენტობის მიმართება η-ს ეწოდება პოზიტიური, თუ წყვილთა სიმრავლე

$$\{< x, y >: < x, y > \in \eta\}$$

რეკურსიულად გადათვლადია.

<u>**განსაზღვრება:**</u> $M \subseteq \mathbb{N}$ η-ჩაკეტილი სიმრავლეა, თუ სრულდება პირობა

$$(\forall x)(\forall y)[\, x \in M \;\&\; < x, y > \in \eta \Rightarrow y \in \eta \,].$$

<u>**ლემა**</u> [4]. ვთქვათ, η პოზიტიური ექვივალენტობაა, A η- ჩაკეტილი სიმრავლეა. მაშინ, არსებობს ისეთი პოზიტიური ექვივალენტობა η', რომ

$$\eta' \subseteq \eta,$$

η' ემთხვევა η -ს $\bar{A}$ -ზე და A სიმრავლის η' ექვივალენტობის ყოველი კლასი სასრულია.

დამტკიცება: ვიგულისხმოთ, რომ A სიმრავლე არაცარიელია. $\{A^{\,n}\}$ -ით აღვნიშნოთ A სიმრავლის სასრულ ქვესიმრავლეთა მკაცრად ზრდადი მიმდევრობა, ისე, რომ

$$A = \cup_{n \geq 0} A^n.$$

ანალოგიურად განვსაზღვრავთ $\{\eta^{\,n}\}$ სიმრავლესაც. დავუშვათ,

$$H^n = \{x: (\exists y)[< x, y > \in \eta' \vee < y, x > \in \eta^{\,n}]\}.$$

პოზიტიური ექვივალენტობა η' განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$< x, y > \in \eta' \equiv$$

$$\equiv (\exists n)(\forall m)[< x, y > \in \eta^{\,n} \;\&\; (m < n \;\&\; \{x, y\} \cap H^m \cap A^{\,m} \neq \emptyset \Rightarrow \{x, y\} \subseteq H^m)].$$

ასე განსაზღვრული η' აკმაყოფილებს ლემის პირობებს. ∎

<u>**განსაზღვრება:**</u> ვთქვათ, η პოზიტიური ექვივალენტობაა. A სიმრავლეს ვუწოდებთ η-ჰიპერჰიპერმარტივ სიმრავლეს, თუ ის რეკურსიულად გადათვლადია, η -ჩაკეტილია, $\bar{A}$ შეიცავს უსასრულო რაოდენობის η -ექვივალენტობის კლასს და არ არსებობს რეკურსიული ფუნქცია $f(x)$ ისეთი, რომ

$$(\forall x)[\, W_{f(x)} \;\; \eta \text{ -ჩაკეტილია} \;\&\; W_{f(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset]$$

$$\&(\forall x)(\forall y)[x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} \cap \bar{A} = \emptyset]. \qquad (2)$$

<u>**ლემა**</u> [4]. არცერთი η -ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე არ შეიძლება იყოს Q- სრული.

დამტკიცება: ვთქვათ, A სიმრავლე Q- სრულია, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$K \leq_Q A,$$

K ფიქსირებული კრეატიული სიმრავლეა. $g'(x)$ რეკურსიული ფუნქციაა, რომლის საშუალებითაც K Q- დაყვანადია A-ზე. ამასთან,

$$(\forall x)[|W_{\,g'(x)}| < \infty|].$$

განვსაზღვროთ რეკურსიული ფუნქცია $g(x)$, ისე, რომ $W_{g(x)}$ η- ჩართული იყოს $W_{g'(x)}$ -ში. K Q- დაყვანადია A-ზე $g(x)$-ის საშუალებითაც. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ყოველი $W_{g(x)}$ შედგება სასრული η -ექვივალენტობის კლასებისაგან. ნაწილობრივ, სიმრავლე

$$W_{f(x)} \cap A$$

სასრული სიმრავლეა.

ავაგოთ რეკურსიული $f(x)$ ფუნქცია, რომელსაც გამოვიყენებთ A სიმრავლის η -ჰიპერჰიპერმარტივობის საჩვენებლად. ვთქვათ, a $\bar{K}$-ის ნებისმიერი ელემენტია. $f(0)$ -ს მივანიჭოთ $g(x)$ -ისმნიშვნელობა. დავუშვათ, f-ის მნიშვნელობა ყოველი x-თვის, $x \leq n$ განსაზღვრულია. რადგან A η -ჰიპერჰიპერმარტივია $x \leq n$ და $y \leq n$ -ისთვის და ყოველი $W_{f(x)}$, $x \leq n$, შედგება სასრული η ექვივალენტობის კლასებისაგან. ვიპოვოთ ეფექტურად $f(n+1)$.

$\{W_z{}^y\}$ -ით აღვნიშნოთ მკაცრად ზრდადი მიმდევრობა y -ის მიმართ, რომელიც W_z- ის სასრული ქვესიმრავლეებისგან შედგება და

$$W_z = \cup_{y \geq 0} W_z{}^y.$$

განვსაზღვროთ რ.გ. B სიმრავლე.

$$B = \{x: (\exists y)\ [x \leq y \ \&\ W_{g(x)}{}^y \cap ((W_{f(0)}{}^y \cup \ldots \cup W_{f(n)}{}^y) \backslash A^n)]\}.$$

B სიმრავლის რეკურსიულად გადათვლადი ინდექსი z_0 ეფექტურად მიიღება g ფუნქციიდან,

$$f(0), \ldots, f(n)$$

რიცხვებიდან და A სიმრავლიდან. განსაზღვრებიდან გამომდინარე, B სიმრავლე შედგება $\bar{K}$-ის იმელემენტებისაგან, რომელთათვისაც

$$W_{g(x)} \cap \bar{A} \cap (W_{f(0)} \cup \ldots \cup W_{f(n)}) \neq \emptyset$$

$$W_{f(x)} \cap A, x \leq n$$

სიმრავლის სასრულობის გამო და K-ს მხოლოდ სასრული რაოდენობს ელემენტებისაგან. ვთქვათ,

$$W_{f(n+1)}$$

არის რ.გ. C სიმრავლის სახე g-თი ასახვისას. C სიმრავლე განვსაზღვროთ შემდეგნაირად. გამოვთვალოთ ელემენტი z_0 C სიმრავლეში(z_0 B სიმრავლის რეკურსიულად გადათვლადი ინდექსია). B სიმრავლის გამოთვლის პროცესში, თუ რომელიმე ეტაპზე აღმოჩნდება, რომ

$$z_0 \in B,$$

გამოვთვლით z_1-ს C სიმრავლეში,

$$W_{z_1} = B \setminus \{z_0\}$$

(z_1 $B \setminus \{z_0\}$ რ.გ. ინდექსია).

თუ ისევ აღმოჩნდება, რომ

$$z_1 \in B,$$

გამოვთვლით რ.გ. z_2 ინდექსს C სიმრავლეში,

$$W_{z_2} = B \setminus \{z_0, z_1\}$$

და ა. შ. C სიმრავლე შედგება სასრული რაოდენობის ელემენტებისაგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში B და C სიმრავლეების განსაზღვრებებიდან მივიღებთ, რომ z_i რომელიც

$$B \cap \overline{K}$$

-ის ელემენტია, W_{z_i}-ის ელემენტიცაა ანუ,

$$z_i \in K.$$

ე.ი.

$$W_{f(n+1)}$$

როგორც C -ს სახე g-თი ასახვისას შედგება სასრული η -ექვივალენტობის კლასებისაგან. C სიმრავლის აგება შეწყდება იმ z_j ელემენტზე $\overline{K}$ -დან , რომელიც არ ეკუთვნის B სიმრავლეს. ამიტომ

$$W_{g(z_j)} \cap \bar{A}$$

არ თანაიკვეთება არცერთ $W_{f(x)}$ -თან, $x \leq n$.

$$W_{f(0)}, \dots , W_{f(n+1)}$$

აკმაყოფილებს (2)-ს, როცა $x \leq n+1$ და $y \leq n+1$. ლემა დამტკიცებულია. ■

<u>**თეორემა**</u> [4]. არცერთი ნახევრადრეკურსიული η -ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე არ შეიძლება იყოს სრული ტიურინგის აზრით.

ლიტერატურა

1. Hartley Rogers Jr.. Theory of Recursive Functions and Effective Computability. 1967

2. Robert Irving Soare. Recursively Enumerable Sets and Degrees .1987

3. Piergiorgio Odifreddi. Classical Recursion Theory. 1989

4. S. S. Marchenkov, One class of partial sets, Mat. Zametki, 1976, Volume 20, Issue 4, 473– 478.

5. V. D. Solov'ev, "Q-reducibility and hyperhypersimple sets", Probabilistic Methods and Cybernetics, Kazan State Univ., Kazan, 1974, pp. 121-128.