ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის

სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ნათია ხაჩიძე

მაღალი რიგის დისკრეტული განტოლებების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესახებ

გამოყენებითი მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკის მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელი: რომან კოპლატაძე,ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ასოცირებული პროფესორი

თბილისი 2016

სარჩევი

რეზიუმე

ნაშრომში შესწავლილია შემდეგი სახის მღალი რიგის სხვაობიანი განტოლების

$$\Delta^{(n)}u(k) + p(k)\left|u(\sigma(k))\right|^{\lambda} sign(u(\sigma(k)) = 0$$

ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევა. სადაც $n \geq 2$, $0 < \lambda < 1$, $p : N \to R$, $\sigma : N \to N$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma(k) = +\infty$.

ნაშრომის მეორე პარაგრაფში მოყვანილია მონოტონური მიმდევრობების ზოგიერთი ახალი თვისება, რომლებსაც არსებითი მნიშვნელობა აქვს ძირითადი შედეგების მიღებისას. მომდევნო პარაგრაფებში დადგენილია საკმარისი პირობები იმისა, რომ განტოლებას გააჩნდეს A და B თვისება (განმარტება იხ.ქვემოთ).

Summary

In this paper is studied the asymptotic behavior of high order difference Equation. Equation is as follows

$$\Delta^{(n)}u(k) + p(k)\left|u(\sigma(k))\right|^{\lambda} sign(u(\sigma(k)) = 0$$

Where $n \geq 2$, $0 < \lambda < 1$, $p : N \to R$, $\sigma : N \to N$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma(k) = +\infty$.

In the second paragraphs of monograph given some properties of monotone sequences, which have the essential sinse for receipt of fundamental results. In the next paragraphs are established sufficient conditions that Equation will have property A and property B. (explain see down)

1. შესავალი

ნაშრომში განხილულია შემდეგი სახის n-ური რიგის სხვაობიანი განტოლება

$$\Delta^{(n)}u(k)+p(k)\left|u(\sigma(k))\right|^{\lambda}sign(u(\sigma(k))=0 \tag{1.1}$$

სადაც $p(k):N\to R$, $\sigma:N\to N$, $\sigma(k)\geq k+1$, $n\geq 2$

$$\begin{aligned}&\Delta u(k)=u(k+1)-u(k)\\&\Delta^{(i)}u(k)=\Delta\circ\Delta^{(i-1)}u(k)\qquad i=2,3,\ldots\ldots\end{aligned} \tag{1.2}$$

ნებისმიერი $k_0\in N$ -თვის $U_{k_0,\ell}$ -ით აღვნიშნოთ (1.1) განტოლების $u:[k_0;+\infty)\to R_+$ ამონახსნების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\Delta^{(i)}u(k)>0,\ \text{როცა}\ k\geq k_0,\ i=0,1,..,\ell-1,$$

$$(-1)^i\Delta^{(i)}u(k)\geq 0,\ \text{როცა}\ k\geq k_0,\ i=\ell,\ldots,n \tag{1.3$_\ell$}$$

ქვემოთ ყველგან იგულისხმება, რომ სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი ორი პირობიდან:

$$p(k)\geq 0,\quad \text{როცა}\quad k\in N \tag{1.4}$$

ან

$$p(k)\leq 0,\quad \text{როცა}\quad k\in N \tag{1.5}$$

ვთქვათ $k_0\in N$, N_{k_0} -ით აღვნიშნოთ სიმრავლე $N_{k_0}\equiv\{k_{k_0},k_0+1,\ldots\}$

განმარტება 1.1 ვთქვათ $k_0\in N$. $u:[k_0;+\infty)\to R$. u -ს ეწოდება (1.1) განტოლების წესიერი ამონახსნი თუ ის აკმაყოფილებს (1.1) განტოლებას $[k_0;+\infty)$ შუალედზე და

$$\sup\{\left|u(k)\right|:k\geq s\}>0\qquad \forall s>k_0\ \text{-თვის} \tag{1.6}$$

განმარტება 1.2 (1.1) განტოლების წესიერ ამონახსნს $u:[k_0;+\infty)\to R$ ეწოდება რხევადი თუ $\forall k$ -თვის არსებობს $k_1,k_2\in N$ ისეთი, რომ

$$u(k_1)u(k_2)<0 \tag{1.7}$$

განმარტება 1.3 ვიტყვით, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნია A თვისება, თუ მისი ყოველი წესიერი ამონახსნი ლუწი n-ის შემთხვევაში რხევადია, ხოლო კენტი n-ის შემთხვევაში ან რხევადია, ან აკმაყოფილებს პირობას

$$\left|\Delta^{(i)}u(k)\right|\downarrow 0,\ \text{როცა}\ k\to+\infty \qquad i=0,\dots,n-1 \tag{1.8}$$

განმარტება 1.4 ვიტყვით, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნია B თვისება , თუ მისი ყოველი წესიერი ამონახსნი ლუწი n-ის შემთხვევაში ან რხევადია, ან აკმაყოფილებს (1.8) პირობას, ან

$$\left|\Delta^{(i)}u(k)\right|\uparrow +\infty,\ \text{როცა}\ k\to+\infty \qquad i=0,\dots,n-1 \tag{1.9}$$

ხოლო კენტი n-ის შემთხვევაში ან რხევადია, ან აკაყოფილებს (1.9) პირობას

მოცემულ ნაშრომში მოყვანილია საკმარისი პირობები იმისათვის, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნდეს A ან B თვისება.

ანალოგიური ამოცანა ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში კარგადაა შესწავლილი [1,2,4]. რაც შეეხება სხვაობიან განტოლებებს ეს ამოცანა კარგად არის შესწავლილი პირველი და მეორე რიგის განტოლებების შემთხვევაში [3,5,6]. ხოლო მაღალი რიგის განტოლებების შემთხვევაში ანალოგიური ამოცანა (მისი სირთულიდან გამომდინარე) თითქმის არ არის შესწავლილი.

2. ზოგიერთი დამხმარე ლემა

ამ პარაგრაფში მოყვანილი იქნება დამხმარე ლემები, რომლებსაც არსებითი მნიშვნელობა აქვს მომდევნო პარაგრაფებში, მიღებული შედეგების დამტკიცების დროს.

ლემა 2.1 ვთქვათ $u: N \to R$, $m \in N$, $j \le m-1$, $k_0 \in N$ მაშინ სამართლიანია

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-j-1)!}\sum_{s=k_0}^{k-1} s^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(s) = \sum_{i=j}^{m-1}\frac{(-1)^i}{(i-j)!}k^{i-j}\Delta^{(i)}u(k) -$$

$$-\frac{1}{(m-j-1)!}\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^i\Delta^{(m-i-1)}(k_0+i-m)^{m-j+1}\Delta^{(i)}u(k_0) \qquad (2.1)$$

შენიშვნა 2.1 ვიგულისხმოთ, რომ $\sum_{s=k_0}^{k_0-1} u(s) = 0$.

დამტკიცება: შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\Phi_m(k) \equiv \sum_{s=k_0}^{k-1} s^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(s) \qquad (2.2)$$

$$\Psi_m(k) \equiv \sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(m-i-1)}(k+i-m)^{m-j-1}\Delta^{(i)}u(k) -$$

$$-\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(m-i-1)}(k_0+i-m)^{m-j-1}\Delta^{(i)}u(k_0) \qquad (2.3_{j,k})$$

ვაჩვენოთ, რომ $$\Phi_m(k) = \Psi_m(k) \qquad (2.4)$$

(2.4) ტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია შესრულდეს შემდეგი ორი ტოლობა:

$$\Phi_m(k_0)=\Psi_m(k_0) \tag{2.5.1}$$

$$\Delta\Phi_m(k)=\Delta\Psi_m(k) \tag{2.5.2}$$

$$\Phi_m(k_0)=\sum_{s=k_0}^{k_0-1} s^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(s)=0$$

$$\Psi_m(k_0)=\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(m-i-1)}(k_0+i-m)^{m-j-1}\Delta^{(i)}u(k_0)-$$
$$-\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(m-i-1)}(k_0+i-m)^{m-j-1}\Delta^{(i)}u(k_0)=0$$

მაშასადამე (2.5.1) ტოლობა სრულდება. ვაჩვენოთ (2.5.2) ტოლობის სამართლიანობა

$$\Delta\Phi_m(k)=\Phi_m(k+1)-\Phi_m(k)=\sum_{s=k_0}^{k} s^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(s)-\sum_{s=k_0}^{k-1} s^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(s)$$

უკანასკნელ ტოლობაში პირველი ჯამიდან გამოვყოთ ბოლო წევრი, მივღებთ

$$\Delta\Phi_m(k)=k^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(k)+\sum_{s=k_0}^{k-1} s^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(s)-\sum_{s=k_0}^{k-1} s^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(s)=k^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(k)$$

განვიხილოთ $\Delta\Psi_m(k)$. თუ გავითვალისწინებთ $(2.3_{j,k})$ მივიღებთ:

$$\Delta\Psi_m(k)=\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\Delta[\Delta^{(m-i-1)}(k+i-m)^{m-j-1}\Delta^{(i)}u(k) \tag{2.6}$$

ნამრავლის სხვაობაგანვმარტოთ შემდეგნაირად:

$$\Delta[u(k)v(k)]=v(k+1)\Delta u(k)+u(k)\Delta v(k) \tag{2.7}$$

მაშინ (2.6)-დან მივიღებთ

$$\Delta\Psi_m(k)=\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}[\Delta^{(m-i-1)}(k+1+i-m)^{m-j-1}\Delta^{(i+1)}u(k)+\Delta^{(m-i)}(k+i-m)^{m-j-1}\Delta^{(i)}u(k)]$$

თუ გავხსნით ფრჩხილები და პირველი შესკრებიდან გამოვყოთ ბოლო წევრი, გვექნება

$$\Delta\Psi_m(k)=k^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(k)+\sum_{i=j}^{m-2}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(m-i-1)}(k+1+i-m)^{m-j-1}\Delta^{(i+1)}u(k)+$$

$$+\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(m-i)}(k+i-m)^{m-j-1}\Delta^{(i)}u(k)$$

რადგან $\Delta^{(m-j)}(k+i-m)^{m-j-1}=0$, მაშინ მეორე ჯამში მოვახდინოთ გარდაქმნა $i=i+1$

$$\Delta\Psi_m(k)=k^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(k)+\sum_{i=j}^{m-2}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(m-i-1)}(k+1+i-m)^{m-j-1}\Delta^{(i+1)}u(k)+$$

$$+\sum_{i=j}^{m-2}(-1)^{m+i-1}\Delta^{(m-i-1)}(k+1+i-m)^{m-j-1}\Delta^{(i+1)}u(k)=k^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(k)$$

ე.ი. სრულდება (2.5.2) ტოლობა. მაშასადამე სრულდება (2.4) ტოლობა.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\Delta^{(m-i-1)}(k+i-m)^{m-j-1}=k^{i-j}\,\frac{(m-j-1)!}{(i-j)!}(1+O(1)) \tag{2.8}$$

მაშინ(2.4)-დან მივიღებთ დასამტკიცებელ (2.1) ტოლობას. მართლაც (2.4)-ში გავითვალისწინოთ (2.8), (2.2), $(2.3_{j,k})$ და გავამრავლოთ ტოლობის ორივე მხარე $\frac{(-1)^{m-1}}{(m-j-1)!}$-ზე. მივიღებთ

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-j-1)!}\sum_{s=k_0}^{k-1}s^{m-j-1}\Delta^{(m)}u(s)=\sum_{i=j}^{m-1}\frac{(-1)^i}{(j-i)!}k^{j-i}\Delta^{(i)}u(k)-$$

$$-\frac{1}{(m-j-1)!}\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^i\Delta^{(m-i-1)}(k_0+i-m)^{m-j+1}\Delta^{(i)}u(k_0)$$

ამით ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.2 (ტეილორის ფორმულა) ვთქვათ $m \in N,\ 0 \le i \le m-1,\ u: N \to R$ მაშინ სამართლიანია

$$\Delta^{(i)}u(k) = \Delta^{(i)}u(s) + \sum_{j=i+1}^{m-1}\frac{\Delta^{(j)}u(s)}{(j-i)!}\prod_{r=1}^{j-i}(k+1-s-r) + \frac{1}{(m-i-1)!}\sum_{r=s}^{k-1}\varphi(k,r,i)\Delta^{(m)}u(r) \tag{$2.9_{m,i}$}$$

სადაც
$$\varphi(k,r,i) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } i = m-1 \\ \prod_{j=1}^{m-i-1}(k-r-j) & \text{როცა } 0 \le i \le m-2 \end{cases} \tag{2.10}$$

დამტკიცება: შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\Delta^{(i)}u(k) \equiv \psi(k)$

$$f(k) \equiv \Delta^{(i)}u(k) + \sum_{j=i+1}^{m-1}\frac{\Delta^{(j)}u(s)}{(j-i)!}\prod_{r=1}^{j-i}(k+1-s-r) + \frac{1}{(m-i-1)!}\sum_{r=s}^{k-1}\varphi(k,r,i)\Delta^{(m)}u(r)$$

განვიხილოთ ნამრავლის სხვაობა:

$$\Delta\prod_{r=1}^{j-i}(k+1-s-r) = \prod_{r=1}^{j-i}(k+2-s-r) - \prod_{r=1}^{j-i}(k+1-s-r)$$

შევცვალოთ საზღვრები, მივიღებთ:

$$\Delta\prod_{r=1}^{j-i}(k+1-s-r) = \prod_{r=0}^{j-i-1}(k+1-s-r) - \prod_{r=1}^{j-i}(k+1-s-r) = \prod_{r=1}^{j-i-1}(k+1-s-r)[j-i] \tag{2.11}$$

(2.11) ტოლობის დახმარებით ვაჩვენოთ, რომ

$$\Delta^{(j)}\psi(s) = \Delta^{(j)}f(s),\quad j = \overline{1, m-i-1}$$

დავუშვათ $j=1$, მაშინ $\Delta\psi(s) = \Delta^{(i+1)}u(s)$

$$\Delta f(s) = [\sum_{j=i+1}^{m-1}\frac{\Delta^{(j)}u(s)}{(j-i)!}\Delta\prod_{r=1}^{j-i}(k+1-s-r) + \frac{1}{(m-i-1)!}\Delta\sum_{r=s}^{k-1}\varphi(k,r,i)\Delta^{(m)}u(r)](s) =$$

$$= \sum_{j=i+2}^{j-i} \frac{\Delta^{(j)}u(s)}{(j-i)!} \prod_{r=1}^{j-i-1}(s+1-s-r)(j-i) + \frac{\Delta^{(i+1)}u(s)}{1!}[\prod_{r=1}^{1}(s+2-s-r) - \prod_{r=1}^{1}(s+1-s-r)] +$$

$$+ \frac{1}{(m-i-1)!} \Delta \sum_{r=s}^{s-1} \varphi(s,r,i) \Delta^{(m)} u(r) = \Delta^{(i+1)} u(s)$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ

$$\Delta^{(j)}\psi(s) = \Delta^{(j)} f(s), \quad j = \overline{1, m-i-1} \tag{2.12}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $$\Delta^{(m-i)}\psi(k) = \Delta^{(m-i)} f(k) \tag{2.13}$$

ამისათვის საჭიროა ვიცოდეთ რისი ტოლია $\Delta \prod_{j=1}^{m-i-1}(k-r-j)$

$$\Delta \prod_{j=1}^{m-i-1}(k-r-j) = \prod_{j=1}^{m-i-1}(k+1-r-j) - \prod_{j=1}^{m-i-1}(k-r-j) =$$

$$= \prod_{j=1}^{m-i-2}(k-r-j)(m-i-1) \tag{2.14}$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.14) და ვიმსჯელებთ ანალოგიურად როგორც (2.12) ტოლობის დამტკიცებისას, მივიღებთ, რომ სამართლიანია (2.13). (2.12) და (2.13) თანახმად გვაქვს, რომ $\psi(k) = f(k)$ ე.ი. სრულდება $(2.9_{m,i})$

ამით ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.3 (ლოპიტალის წესი) ვთქვათ $u: N \to R, v: N \to R$, $\lim_{k\to+\infty} v(k) = +\infty$,

$\lim_{k\to+\infty} u(k) = +\infty$ თუ არსებობს $\lim_{k\to+\infty} \frac{\Delta u(k)}{\Delta v(k)}$, მაშინ არსებობს $\lim_{k\to+\infty} \frac{u(k)}{v(k)}$ და

ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u(k)}{v(k)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\Delta u(k)}{\Delta v(k)} \tag{2.15}$$

დამტკიცება: ვთქვათ არსებობს $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\Delta u(k)}{\Delta v(k)}=\alpha$. მაშინ ზღვრის განმარტების

თანამად

$$\alpha-\varepsilon\le\frac{\Delta u(k)}{\Delta v(k)}\le\alpha+\varepsilon,\quad \text{სადაც } \varepsilon \text{ მცირე რიცხვია}$$

გავამრავლოთ უტოლობა $\Delta v(k)$ და ავჯამოთ k_0-დან k-მდე, გამოვიყენოთ Δ ოპერატორი. მივიღებთ

$$(\alpha-\varepsilon)(v(k+1)-v(k_0))\le u(k+1)-u(k_0)\le(\alpha+\varepsilon)(v(k+1)-v(k_0))$$

გავყოთ უტოლობა $v(k+1)$-ზე

$$(\alpha-\varepsilon)\left(1-\frac{v(k_0)}{v(k+1)}\right)\le\frac{u(k+1)}{v(k+1)}-\frac{u(k_0)}{v(k+1)}\le(\alpha+\varepsilon)\left(1-\frac{v(k_0)}{v(k+1)}\right)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\lim\limits_{k\to\infty}v(k)=+\infty$, მაშინ

$$\alpha-\varepsilon\le\frac{u(k+1)}{v(k+1)}\le\alpha+\varepsilon$$

საიდნაც ვღებულობთ, რომ $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{u(k)}{v(k)}=\alpha$

დავუშათ $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\Delta u(k)}{\Delta v(k)}=+\infty$ მაშინ ნებისმიერი რაგინდ დიდი M-თვის ყოველთვის მოიძებნება k_1 ისეთი, რომ როცა $k\ge k_1$

$$\frac{\Delta u(k)}{\Delta v(k)}>M$$

$\Delta u(k)>M\Delta v(k)$ უტოლობის ორივე მხარე ავჯამოთ k_1-დან k -მდე და კვლავ გამოვიყენოთ სხვაობის ოპერატორი. მივიღებთ

$$\Delta u(k+1)-u(k_0)>M(v(k+1)-v(k_0))$$

უტოლობის ორივემხარე გავყოთ $v(k+1)$-ზე და გავითვალისწინოთ, რომ

$\lim\limits_{k\to+\infty} v(k+1)=+\infty$. მივიღებთ $\dfrac{u(k+1)}{v(k+1)}>M$, როცა $k\geq k_1$. ე.ი. $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{u(k)}{v(k)}=+\infty$.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.4 ვთქვათ $m\geq 2$, $u:N\to R$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობებს: არსებობს $k_0\in N$ ისეთი, რომ $u(k)>0$ როცა $k\geq k_0$, $\Delta^{(m)}u(k)\leq 0$ $(\Delta^{(m)}u(k)\geq 0)$ როცა $k\geq k_0$ $\Delta^{(m)}u(k)\neq 0$ უსასრულობის ნებისმიერ მიდამოში, მაშინ არსებობს $\ell\in\{0,1,2,\ldots m\}$, ისეთი რომ $\ell+m$ არის კენტი ($\ell+m$ ლუწია) და $k_1>k_0$ ისეთი, რომ სრულდება შემდეგი უტოლობები

$$\Delta^{(i)}u(k)>0,\quad i=0,\ldots.\ell-1 \text{ როცა } k\geq k_1$$

$$(-1)^{i+\ell}\Delta^{(i)}u(k)\geq 0\qquad i=\ell,\ldots m-1 \text{ როცა } k\geq k_1 \tag{2.18_ℓ}$$

$$\Delta^{(m)}u(k)\leq 0,\quad (\Delta^{(m)}u(k)\geq 0) \text{ როცა } k\geq k_1$$

შენიშვნა 2.2 თუ $\ell=0$, (2.18_ℓ) პირობებში იგულისხმება, რომ სრულდება მეორე და მესამე პირობები.

დამტკიცება: პირობის ძალით $\Delta^{(m)}u(k)\leq 0$ როცა $k\geq k_0$. მაშინ არსებობს k^* ისეთი, რომ როცა $k^*\geq k$ სრულდება შემდეგი ორიდან ერთ-ერთი 1) $\Delta^{(m-1)}u(k)\leq 0$ ან 2) $\Delta^{(m-1)}u(k)\geq 0$

ვთქვათ სრულდება პირველი. წარმოვადგინოთ $\Delta^{(m-2)}u(k)$, $\Delta^{(m-1)}u(k)$-ს საშულებით.

$$\Delta^{(m-2)}u(k)=\Delta^{(m-2)}u(k_0)+\sum_{s=k_0}^{k-1}\Delta^{(m-1)}u(k)$$

$\Delta^{(m-2)}u(k_0)$ -ფიქსირებული რიცხვია და როცა $k \to +\infty$ მივიღებთ, რომ $\Delta^{(m-2)}u(k) \le 0$. ანალოგიურად გვექნება $\Delta^{(m-3)}u(k) \le 0$ და ა.შ. მაშინ $u(k) \le 0$ რაც ეწინააღმდეგება პირობას.

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა $\Delta^{(m-1)}u(k) \ge 0$. აქაც გვექნება ორი შემთხვევა რაღაც ადგილიდან დაწყებული $\Delta^{(m-2)}u(k) \le 0$ ან $\Delta^{(m-2)}u(k) \ge 0$. აქ კი განვიხილოთ $\Delta^{(m-2)}u(k) \ge 0$. მაშინ გვაქვს

$$\left.\begin{array}{l} \Delta^{(m)}u(k) \le 0 \\ \Delta^{(m-1)}u(k) \ge 0 \\ \Delta^{(m-2)}u(k) \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta^{(m-3)}u(k) \ge 0$$

საბოლოოდ $u(k) > 0$. ანუ სხვაობებმა ნიშანცვლა დაიწყო $m-$ური რიგიდან, მაშინ $\ell = m-1$. შევამოწმოთ (2.18_ℓ) პირობა:

$$\Delta^{(i)}u(k) > 0 \quad \text{როცა} \quad k \ge k_1 \quad \text{სადაც} \quad k_1 > k^* \qquad i = 0,\dots,m-2$$

$$(-1)^{m-1+m-1}\Delta^{(m-1)}u(k) \ge 0 \quad \text{როცა} \quad k \ge k_1 \quad \text{სადაც} \quad k_1 > k^* \qquad i = m-1$$

ამ შემთხვევაში $\ell + m = m-1+m = 2m-1$ ანუ კენტია. ესე იგი სრულდება (2.18_ℓ)

$\Delta^{(m-2)}u(k) \le 0-$თვის ვიმსჯელოთ ანალოგიურად როგორც $\Delta^{(m)}u(k) \le 0$ -ის შემთხვევაში. ამით ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.5 ვთქვათ $u: N \to R,\ n \ge 2$ და სრულდება პირობები

$$(-1)^i \Delta^{(i)}u(k) > 0 \ \ (i = \overline{0, n-1}), \ \ (-1)^n \Delta^{(n)}u(k) \ge 0 \ \text{როცა} \ k \ge k_0 \qquad (2.21)$$

მაშინ

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} k^{n-\ell} \left|\Delta^{(n)} u(k)\right| < +\infty \tag{2.22}$$

$$\left|\Delta^{(i)} u(k)\right| \geq \frac{1}{(m-i-1)!} \sum_{r=k-1}^{+\infty} \varphi^*(k,r,i) \left|\Delta^{(n)} u(r)\right| \quad k \geq k_0,\ i = \overline{0, n-1} \tag{2.23}$$

სადაც $\varphi^*(k,r,i) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } i = n-1 \\ \prod_{j=1}^{n-i-1} (r+j-k) & \text{როცა } 0 \leq i \leq n-2 \end{cases}$

$$u(k) \geq u(s) + \sum_{j=1}^{n-1} \left| \frac{\Delta^{(j)} u(s)}{j!} \right| \prod_{r=1}^{j} (s+r-k-1) \qquad \text{როცა} \quad s \geq k \geq k_0 \tag{2.24}$$

დამტკიცება: განვიხილოთ ტეილორის ფორმულა $m=n$ და $i=0$ -თვის მივიღებთ

$$u(k) = u(s) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\Delta^{(j)} u(s)}{j!} \prod_{r=1}^{j} (k+1-s-r) + \frac{1}{(n-1)!} \sum_{r=s}^{k-1} \varphi(k,r,0) \Delta^{(n)} u(r) =$$

$$= u(s) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^j \Delta^{(j)} u(s)}{j!} \prod_{r=1}^{j} (s+r-k-1) + \frac{(-1)}{(n-1)!} \sum_{r=k-1}^{s} (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (r+j-k) \Delta^{(n)} u(r)$$

(2.25)

(2.25)-ში თუ გავითვალისწინებთ (2.21) მივიღებთ

$$u(k) = u(s) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\left|\Delta^{(j)} u(s)\right|}{j!} \prod_{r=1}^{j} (s+r-1-k) + \frac{1}{(n-1)!} \sum_{r=k-1}^{s} \prod_{j=1}^{n-1} (r+j-k) \left|\Delta^{(n)} u(r)\right|$$

$$u(k) \geq u(s) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\left|\Delta^{(j)} u(s)\right|}{j!} \prod_{r=1}^{j} (s+r-k-1)$$

ამით (2.24) დამტკიცდა.

ახლა ვაჩვენოთ (2.23) უტოლობის სამართლიანობა. განვიხილოთ კვლავ ტეილორის ფორმულა $(2.9_{n,i})$ და ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $(-1)^i$ -ზე, მაშინ გვექნება შემდეგი გამოსახულება:

$$(-1)^i \Delta^{(i)}u(k) = (-1)^i \Delta^{(i)}u(s) + (-1)^i \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{\Delta^{(j)}u(s)}{(j-i)!} \prod_{r=1}^{j-i}(k+1-s-r) + \frac{(-1)^i}{(n-i-1)!} \sum_{r=s}^{k-1} \varphi(k,r,i)\Delta^{(n)}u(r)$$

მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრებში ნამრავლიდან გავიტანოთ $(-1)^{j-i}$, მესამე შესაკრებში შევცვალოთ ჯამის საზღვრები და $\varphi(k,r,i)$ -დან გავიტანოთ $(-1)^{n-i-1}$. მივიღებთ

$$(-1)^i \Delta^{(i)}u(k) = (-1)^i \Delta^{(i)}u(s) + \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{(-1)^j \Delta^{(j)}u(s)}{(j-i)!} \prod_{r=1}^{j-i}(s+r-k-1) + \frac{(-1)^n}{(n-i-1)!} \sum_{r=k-1}^{s} \varphi^*(k,r,i)\Delta^{(n)}u(r)$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.21)-ის პირობებს გვექნება

$$\left|\Delta^{(i)}u(k)\right| = \left|\Delta^{(i)}u(s)\right| + \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{\left|\Delta^{(j)}u(s)\right|}{(j-i)!} \prod_{r=1}^{j-i}(s+r-k-1) + \frac{(-1)^n}{(n-i-1)!} \sum_{r=k-1}^{s} \varphi^*(k,r,i)\left|\Delta^{(n)}u(r)\right|$$

თუ განვიხილავთ, რომ $s \to +\infty$ მაშინ

$$\left|\Delta^{(i)}u(k)\right| \geq \frac{1}{(m-i-1)!} \sum_{r=k-1}^{+\infty} \varphi^*(k,r,i)\left|\Delta^{(n)}u(r)\right|, \qquad k \geq k_0, \qquad i = \overline{0,n-1}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ნაწილობითი შეჯამებადობის ფორმულა:

$$\sum_{S=k_0}^{k-1} u(s)\Delta v(s) = u(k-1)v(k) - u(k_0-1)v(k_0) - \sum_{s=k_0}^{k-1} v(s)\Delta u(s-1)$$

ლემა 2.6 ვთქვათ $u : N \to R$ და რომელიმე ℓ -თვის, სადაც $\ell \in \{1,2,..,n-1\}$ სრულდება (2.18_ℓ) პირობა მაშინ

$$\sum_{k=k_1}^{+\infty} k^{n-\ell-1} \left|\Delta^{(n)} u(k)\right| < +\infty \tag{2.27}$$

$$\Delta^{(i)}u(k) \geq \Delta^{(i)}u(k_0) + \frac{1}{(n-i-1)!(n-\ell-1)!} \sum_{r=k_0}^{k-1} \varphi(k,r,i) \sum_{j=r-1}^{+\infty} \left|\varphi(r,j,\ell)\right| \left|\Delta^{(n)}u(j)\right| \quad i = \overline{o,\ell-1}$$

(2.28)

$$\left|\Delta^{(i)}u(k)\right| \geq \frac{1}{(n-i-1)!} \sum_{r=k-1}^{+\infty} \left|\varphi(k,r,i)\right| \left|\Delta^{(n)}u(r)\right| \qquad i = \ell,...n-1 \tag{2.29}$$

გარდა ამისა თუ სრულდება

$$\sum_{k=k_1}^{+\infty} k^{n-\ell} \left|\Delta^{(n)} u(k)\right| = +\infty \tag{2.30}$$

$$\text{მაშინ} \quad \frac{u(k)}{(k+1-\ell)^{\ell}} \downarrow 0, \quad \frac{u(k)}{k^{\ell-1}} \uparrow +\infty, \quad \text{როცა} \quad k \to +\infty \tag{2.31}$$

$$u(k) > \frac{1+O(1)}{\ell!} k^{\ell-1} \Delta^{(\ell-1)} u(k) \tag{2.32}$$

და

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k) \geq \frac{1}{(n-\ell)!} \sum_{s=k_1}^{k-1} \sum_{j=s}^{+\infty} j^{n-\ell-1} \left|\Delta^{(n)}u(j)\right| \quad \text{საკმარისად დიდი } k \text{ -თვის} \tag{2.33}$$

დამტკიცება: განვიხილოთ ტეილორის ფორმულა $m = n$ შემთხვევაში, გავამრავლოთ ტოლობის ორივე მხარე $(-1)^i$ -ზე, ვიგულისხმოთ, რომ $s = k-1$ მაშინ მივიღებთ:

$$(-1)^{i+\ell}\Delta^{(i)}u(k)=(-1)^{i+\ell}\Delta^{(i)}u(k-1)+\frac{(-1)^{i}}{(n-i-1)!}\sum_{r=k-1}^{+\infty}\phi(k,r,i)\Delta^{(n)}u(r)+$$

$$+(-1)^{i+\ell}\sum_{j=i+1}^{n-1}\frac{\Delta^{(j)}u(k-1)}{(j-i)!}\prod_{r=1}^{j-i}(k+1-k+1-r) \quad \text{სადაც } i=\overline{\ell,n-1}, \quad k\to+\infty .$$

თუ მეორე შესაკრებს გარდავქმნით შემდეგნაირად $\varphi(k,r,i)=(-1)^{n-i-1}\varphi^{*}(k,r,i)$ ასევე თუ გავითვალისწინებთ (2.18_{ℓ}) გვექნება

$$\left|\Delta^{(i)}u(k)\right|=\left|\Delta^{(i)}u(k-1)\right|+C-\frac{(-1)^{\ell+n}}{(n-i-1)!}\sum_{r=k-1}^{+\infty}\varphi^{*}(k,r,i)\Delta^{(n)}u(r)$$

კვლავ (2.18_{ℓ}) პირობის გათვალისწინებით

$$\left|\Delta^{(i)}u(k)\right|\ge\frac{1}{(n-i-1)!}\sum_{r=k-1}^{+\infty}\left|\varphi(k,r,i)\right|\left|\Delta^{(n)}u(r)\right|, \quad i=\overline{\ell,n-1}$$

მივიღეთ (2.29)-ის სამართლიანობა.

განვიხილოთ კვლავ ტეილრის ფორმულა $s=k_0$-თვის $i=\overline{0,\ell-1}$

$$\Delta^{(i)}u(k)=\Delta^{(i)}u(k_0)+\frac{1}{(n-i-1)!}\sum_{r=k_0}^{k-1}\varphi(k,r,i)\Delta^{(\ell)}u(r)+(-1)^{i+\ell}\sum_{j=i+1}^{\ell-1}\frac{\Delta^{(j)}u(k_0)}{(j-i)!}\prod_{r=1}^{j-i}(k+1-k_0-r)$$

(2.18_{ℓ}) პირობის გათვალისწინებით $\Delta^{(\ell)}u(r)=\left|\Delta^{(\ell)}u(r)\right|$, თუ გამოვიყენებთ (2.29) უტოლობას $i=\ell$-თვის მაშინ გვექნება

$$\Delta^{(i)}u(k)\ge\Delta^{(i)}u(k_0)+\frac{1}{(n-i-1)!(n-\ell-1)!}\sum_{r=k_0}^{k-1}\varphi(k,r,i)\sum_{j=r-1}^{+\infty}\left|\varphi(k,r,\ell)\right|\left|\Delta^{(n)}u(j)\right|$$

მივიღეთ (2.28).

ვიგულისხმოთ, რომ სრულდება (2.30) პირობა და ვაჩვენოთ სამართლიანობა (2.31) (2.32) (2.33) გამოსახულებების. ამისათვის ლემა 2.1-ში დამტკიცებული ტოლობა ჩავწეროთ $j=\ell-1$, $m=n$-თვის და გავამრავლოთ $(-1)^{\ell-1}$-ზე

$$\frac{(-1)^{n+\ell-1-1}}{(n-j-1)!}\sum_{s=k_0}^{k-1}s^{n-\ell}\Delta^{(n)}u(s)=\sum_{i=\ell-1}^{n-1}\frac{(-1)^{i+\ell-1}}{(i-\ell+1)!}k^{i-\ell+1}\Delta^{(i)}u(k)-$$

$$-\frac{(-1)^{\ell-1}}{(n-\ell)!}\sum_{i=\ell-1}^{n-1}(-1)^i\Delta^{(n-i-1)}(k_0+i-n)^{n-\ell}\,\Delta^{(i)}u(k_0)$$

მარჯვენა მხარეში პირველი ჯამის ორი წევრი გამოვყოთ დ ყველაფერი გადავიტანოთ, გარდა ამ ორი წევრისა, ტოლობის მარცხენა მხარეს

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k)-k\Delta^{(\ell)}u(k)=\frac{(-1)^{n+\ell}}{(n-\ell)!}\sum_{s=k_0}^{k-1}s^{n-\ell}\Delta^{(n)}u(s)+\sum_{i=\ell+1}^{n-1}\frac{(-1)^{i+\ell}}{(i-\ell+1)!}k^{i-\ell+1}\Delta^{(i)}u(k)+$$

$$+\frac{(-1)^{\ell-1}}{(n-\ell)!}\sum_{i=\ell-1}^{n-1}(-1)^i\Delta^{(n-i-1)}(k_0+i-n)^{n-\ell}\,\Delta^{(i)}u(k_0)$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.18_ℓ) პირობას და ასევე გავითალისწინებთ, რომ მარჯვენა მხარის ბოლო შესაკრები მუდმივია

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k)-k\Delta^{(\ell)}u(k)=\sum_{i=\ell+1}^{n-1}\frac{k^{i-\ell+1}\left|\Delta^{(i)}u(k)\right|}{(i-\ell+1)!}+\frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{s=k_0}^{k-1}s^{n-\ell}\left|\Delta^{(n)}u(s)\right|+C$$

რადგან $\sum_{s=k_0}^{k-1}s^{n-\ell}\left|\Delta^{(n)}u(s)\right|\to+\infty$ როცა $k\to+\infty$ ამიტომ შევარჩევთ $k_1>k_0$ ისეთს,

რომ

$\sum_{s=k_0}^{k-1}s^{n-\ell}\left|\Delta^{(n)}u(s)\right|+C>0$ მაშინ უკანასკნელი ტოლობა ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k)-k\Delta^{(\ell)}u(k)\ge\sum_{i=\ell+1}^{n-1}\frac{k^{i-\ell+1}\left|\Delta^{(i)}u(k)\right|}{(i-\ell+1)!}+\frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{s=k_1}^{k-1}s^{n-\ell}\left|\Delta^{(n)}u(s)\right|$$

საკმარისად დიდი k -თვის (2.34)

აქედან ვღებულობთ, რომ

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k)-k\Delta^{(\ell)}u(k)\to+\infty \quad \text{როცა} \quad k\to+\infty \tag{2.35}$$

საკმარისად დიდი k -თვის მივიღეთ, რომ

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k)\geq k\Delta^{(\ell)}u(k)+\sum_{i=\ell+1}^{n-1}\frac{k^{i-\ell+1}}{(i-\ell+1)!}\left|\Delta^{(i)}u(k)\right|$$

ანუ გვაქვს (2.33) უტოლობა

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k)\geq \sum_{i=\ell}^{n-1}\frac{k^{i-\ell+1}}{(i-\ell+1)!}\left|\Delta^{(i)}u(k)\right|$$

აღვნიშნოთ: $\rho_i(k)\equiv i\Delta^{(\ell-i)}u(k)-(k+1-i)\Delta^{(l-i+1)}u(k) \quad i=\overline{1,\ell}$ (2.36)

$$r_i(k)\equiv k\Delta^{(\ell-i+1)}u(k)-(i-1)\Delta^{(\ell-i)}u(k) \quad i=\overline{1,\ell} \tag{2.37}$$

გამოვიყენოთ ჩვენს მიერ მიღებული (2.35) და ლოპიტალის წესი (2.15) მაშინ გვექნება, რომ

$$\varliminf_{k\to+\infty}\frac{\Delta^{(\ell-i)}u(k)}{k^{i-1}}=+\infty \tag{2.38}$$

მართლაც განვიხილოთ $\dfrac{\Delta(\Delta^{(\ell-I)}u(k))}{\Delta(k^{i-1})}=\dfrac{\Delta^{(\ell-i+1)}u(k)}{(k+1)^{i-1}-k^{i-1}}$ როცა $i=2$

$\dfrac{\Delta^{(\ell-1)}u(k)}{k+1-k}=\Delta^{(\ell-1)}u(k)\to+\infty,$ როცა $k\to+\infty$

მაშინ მიღებთ, რომ $\displaystyle\varliminf_{k\to+\infty}\frac{\Delta^{(\ell-2)}u(k)}{k}=+\infty$

$i=3$ შემთხვევაში $\displaystyle\varliminf_{k\to+\infty}\frac{\Delta^{(\ell-2)}u(k)}{(k+1)^2-k^2}=\varliminf_{k\to+\infty}\frac{\Delta^{(\ell-2)}u(k)}{2k+1}=+\infty$

მაშინ $\displaystyle\varliminf_{k\to+\infty}\frac{\Delta^{(\ell-3)}u(k)}{k^2}=+\infty$ და ა.შ. ე.ი. სამართლიანია (2.38)

(2.38) ტოლობაში მოვახდინოთ გარდაქმნა $i=\ell$ მივიღებთ $\varliminf_{k\to+\infty}\frac{u(k)}{k^{\ell-1}}=+\infty$ ანუ

$\frac{u(k)}{k^{\ell-1}}\to+\infty$ როცა $k\to+\infty$

ვაჩვენოთ, რომ $\Delta\rho_{i+1}(k)=\rho_i(k)$. ამისათვის გამოვიყენოთ (2.36)

$$\rho_{i+1}(k)=(i+1)\Delta^{(\ell-i-1)}u(k)-(k-i)\Delta^{(\ell-i)}u(k)$$

განვიხილოთ $\Delta\rho_{i+1}(k)=\Delta[(i+1)\Delta^{(\ell-i-1)}u(k)]-\Delta[(k-i)\Delta^{(\ell-i)}u(k)]$ (2.39)

(2.39) ტოლობის მარჯვენა მხარეში განვიხილოთ მეორე წევრი

$$\Delta[(k-i)\Delta^{(\ell-i)}u(k)]=(k+1-i)\Delta^{(\ell-i)}u(k+1)-(k-i)\Delta^{(\ell-i)}u(k)$$

ჩავსვათ (2.39)-ში მივიღებთ:

$$\Delta\rho_{i+1}(k)=(i+1)\Delta^{(\ell-i)}u(k)-(k+1-i)\Delta^{(\ell-i)}u(k)+(k-i)\Delta^{(\ell-i)}u(k)$$

მარჯვენა მხარეში პირველი და მესამე წევრების ჯამი ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$i\Delta^{(\ell-i)}u(k)+(k+1-i)\Delta^{(\ell-i)}u(k)$ მაშინ (2.39) მიიღებს სახეს

$$\Delta\rho_{i+1}(k)=i\Delta^{(\ell-i)}u(k)-(k+1-i)\Delta^{(\ell-i+1)}u(k)$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.36)-ს მივიღებთ, რომ

$$\Delta\rho_{i+1}(k)=\rho_i(k). \tag{2.40}$$

(2.40) და (2.35)-ის გათვალისწინებით $\rho_i(k)>0$, $i=\overline{1,\ell}$

(2.32)-ის დასამტკიცებლად მოვიქცეთ შემდეგნაირად: განვიხილოთ $\rho_i(k)>0$ უტოლობა თითოეული $i=\overline{1,\ell}$-თვის და უტოლობაში არსებული დაბალი რიგის სხვაობა შევაფასოთ ქვემოდან დანარჩენების საშუალებით:

$$\rho_\ell(k)=\ell u(k)-(k+1-\ell)\Delta u(k)>0 \;\Rightarrow\; u(k)>\frac{(k+1-\ell)\Delta u(k)}{\ell}$$

$$\rho_{\ell-1}(k)=(\ell-1)u(k)-(k+2-\ell)\Delta^{(2)}u(k)>0 \quad \Rightarrow \quad \Delta u(k)>\frac{(k+2-\ell)\Delta^{(2)}u(k)}{\ell-1}$$

....

....

$$\rho_1(k)=\Delta^{(\ell-1)}u(k)-k\Delta^{(\ell)}u(k)>0$$

თუ გამოვიყენებთ ამ შეფასებებს მივიღებთ

$$u(k)>\frac{(k-(\ell-1))(k-(\ell-2))\ldots(k-2)(k-1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(\ell-1)\ell}\Delta^{(\ell-1)}u(k).$$

აქედან ადვილი დასანახია, რომ $u(k)>\dfrac{k^{\ell-1}(1+O(1))}{\ell!}\Delta^{(\ell-1)}u(k).$

ვაჩვენოთ, რომ $\dfrac{u(k)}{(k+1-\ell)^{\ell}}\downarrow$ მონოტონურია. $\dfrac{u(k)}{(k+1-\ell)^{\ell}}$ -შეფარდების სხვაობა

განვიხილოთ შემდეგნაირად

$$\Delta\frac{u(k)}{(k+1-\ell)^{\ell}}=\frac{u(k+1)}{(k+1-(\ell-1))^{\ell}}-\frac{u(k)}{(k-(\ell-1))^{\ell}} \tag{2.41}$$

ამის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\Delta\frac{u(k)}{(k+1-\ell)^{\ell}}=\frac{(k-(\ell-1))^{\ell}u(k+1)-u(k)(k+1-(\ell-1))^{\ell}}{[(k+1-(\ell-1))(k-(\ell-1))]^{\ell}}=$$
$$=\frac{(k-(\ell-1))^{\ell}\Delta u(k)-u(k)[(k+1-(\ell-1))^{\ell}-(k-(\ell-1))^{\ell}]}{[(k+1-(\ell-1))(k-(\ell-1))]^{\ell}}$$

შევაფასოთ ზემოდან მივიღებთ

$$\Delta\frac{u(k)}{(k+1-\ell)^{\ell}}\le\frac{(k-(\ell-1))^{\ell-1}[(k-\ell+1)\Delta u(k)-\ell u(k)]}{[(k+1-(\ell-1))(k-(\ell-1))]^{\ell}}$$

რადგან $\rho_\ell(k)=\ell u(k)-(k-\ell+1)\Delta u(k)$ და $\rho_\ell(k)>0$ ამიტომ $\Delta\dfrac{u(k)}{(k+1-\ell)^\ell}\le 0$ ე.ი.

$\dfrac{u(k)}{(k+1-\ell)^\ell}\downarrow$ როცა $k\to+\infty$.

ახლა ვაჩვენოთ $\dfrac{u(k)}{k^{\ell-1}}$ -ის მონოტონურობა. ამისათვის განვიხილოთ შეფარდება

$\dfrac{u(k)}{\prod_{i=0}^{\ell-2}(k+i)}$ და დავწეროთ მისი სხვაობა ანალოგიურად როგორც (2.41)-ში

განვიხილეთ.

$$\Delta\frac{u(k)}{\prod_{i=0}^{\ell-2}(k+i)}=\frac{ku(k+1)-(k+\ell-1)u(k)}{\prod_{i=0}^{\ell-1}(k+i)}$$

მრიცხველში მოვახდონოთ გარდაქმნა

$ku(k+1)-ku(k)-(\ell-1)u(k)=k\Delta u(k)-(\ell-1)u(k)$ თუ გავითვალისწინებთ (2.37) ,აშინ

გვაქვს, რომ $\Delta\dfrac{u(k)}{\prod_{i=0}^{\ell-2}(k+i)}=\dfrac{r_\ell(k)}{\prod_{i=0}^{\ell-1}(k+i)}\ge 0$ სადაც მნიშვნელი არის $k^{\ell-1}$ რიგის.

ამიტომ $\dfrac{u(k)}{k^{\ell-1}}\uparrow+\infty$, როცა $k\to+\infty$.

განვიხილოთ (2.1) ტოლობა $m=n$ და $j=\ell$ -თვის და გავამრავლოთ ტოლობის

ორივ მხარე $(-1)^\ell$ -ზე:

$$\sum_{i=\ell}^{n-1}\frac{(-1)^{i+\ell}}{(i-\ell)!}k^{i-\ell}\Delta^{(i)}u(k)=\frac{(-1)^{n+\ell-1}}{(n-\ell-1)!}\sum_{s=k_0}^{k-1}s^{n-\ell-1}\Delta^{(n)}u(s)+$$

$$+\frac{(-1)^\ell}{(n-\ell-1)!}\sum_{i=\ell}^{n-1}(-1)^i\Delta^{(n-i-1)}(k_0+i-n)^{n-\ell-1}\Delta^{(i)}u(k_0)$$

მარჯვენა მხარის პირველ შესაკრებში მოვახდინოთ ჯამის გარდაქმნა:

$$\sum_{s=k_0}^{k-1} s^{n-\ell-1}\Delta^{(n)}u(s) = -\sum_{s=k-1}^{k_0} s^{n-\ell-1}\Delta^{(n)}u(s)$$

ასევე გავითვალისწინოთ (2.18_ℓ) პირობა. მივიღებთ, რომ

$$\sum_{i=\ell}^{n-1}\frac{k^{i-\ell}}{(i-\ell)!}\left|\Delta^{(i)}u(k)\right| = \frac{1}{(n-\ell-1)!}\sum_{s=k-1}^{k_0} s^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(s)\right| +$$

$$+\frac{1}{(n-\ell-1)!}\sum_{i=\ell}^{n-1}\Delta^{(n-i-1)}(k_0+i-n)^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(i)}u(k_0)\right|$$

მარჯვენა მხარეში მეორეშესაკრები მუდმივია და დადებითი როცა $k_0 \to +\infty$ ამიტომ შეგვიძლია იგი უგულებელვყოთ და მივიღებთ

$$\sum_{i=\ell}^{n-1}\frac{k^{i-\ell}}{(i-\ell)!}\left|\Delta^{(i)}u(k)\right| \geq \frac{1}{(n-\ell-1)!}\sum_{s=k-1}^{+\infty} s^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(s)\right| \tag{2.42}$$

განვიხილოთ (2.42) და გავამრავლოთ უტოლობის ორივე მხარე $\frac{k}{n-\ell}$-ზე:

$$\sum_{i=\ell}^{n-1}\frac{k^{i-\ell+1}\left|\Delta^{(i)}u(k)\right|}{(i-\ell)!(n-\ell)} \geq \frac{k}{(n-\ell)!}\sum_{s=k_1}^{+\infty} s^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(s)\right| \tag{2.43}$$

(2.34) უტოლობა ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k) \geq \sum_{i=\ell}^{n-1}\frac{k^{i-\ell+1}\left|\Delta^{(i)}u(k)\right|}{(i-\ell+1)!} + \frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{s=k_1}^{k-1} s^{n-\ell}\left|\Delta^{(n)}u(s)\right|$$

ცხადია, რომ მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები

$$\sum_{i=\ell}^{n-1}\frac{k^{i-\ell+1}\left|\Delta^{(i)}u(k)\right|}{(i-\ell+1)!} \geq \sum_{i=\ell}^{n-1}\frac{k^{i-\ell+1}\left|\Delta^{(i)}u(k)\right|}{(i-\ell)!(n-\ell)} \tag{2.44}$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.44) და (2.43) მაშინ (2.34) უტოლობა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k) \geq \frac{k}{(n-\ell)!}\sum_{s=k-1}^{+\infty} s^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(s)\right| + \frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{s=k_1}^{k-1} s^{n-\ell}\left|\Delta^{(n)}u(s)\right| \tag{2.45}$$

(2.45) შეფასებაში განვიხილოთ მეორე შესაკრები. ჩავწეროთ იგი სხვაობის სახით

$$\frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{s=k_1}^{k-1} s^{n-\ell}\left|\Delta^{(n)}u(s)\right| = -\frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{s=k_1}^{k-1} s\cdot\Delta\sum_{k=s}^{+\infty} k^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(k)\right|$$

გამოვიყენოთ ნაწილობითი შეჯამებადობის ფორმულა და ჩავწეროთ (2.45) შეფასებაში

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k) \geq \frac{k}{(n-\ell)!}\sum_{s=k-1}^{+\infty} s^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(s)\right| - \frac{1}{(n-\ell)!}(k-1)\sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(j)\right| + \frac{k_1-1}{(n-\ell)!}\sum_{j=k_1}^{+\infty} j^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(j)\right| +$$
$$+\frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{s=k_1}^{k-1}\sum_{j=s}^{+\infty} j^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(j)\right|$$

თუ პირველ შესაკრებში გამოვყოფთპირველ წევრს და მსგავს შესაკრებებს შევაერთებთ მივიღებთ:

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k) \geq \frac{k}{(n-\ell)!}(k-1)^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(k-1)\right| + \frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(j)\right| + \frac{k_1-1}{(n-\ell)!}\sum_{j=k_1}^{+\infty} j^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(j)\right| +$$

$$+\frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{s=k_1}^{k-1}\sum_{j=s}^{+\infty} j^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(j)\right|$$

ამ უკანასკნელში უგულებელვყოთ პირველი სამი შესაკრბი (ამის უფლება გვაქვს, რადგან ცხადია რომ ისინი დადებითებია). საბოლოოდ გვექნება

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k) \geq \frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{s=k_1}^{k-1}\sum_{j=s}^{+\infty} j^{n-\ell-1}\left|\Delta^{(n)}u(j)\right|$$

ე.ი. სამართლიანია (2.33). ამგვარად ლემა დამტკიცებულია.

3.მონოტონური ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობები

თეორემა 3.1 ვთქვათ, სრულდება (1.4) ((1.5)), $0<\lambda<1$, $k_0 \in N$ და $\ell \in \{1,2,..,n-1\}$ სადაც $\ell+n$ კენტ ია ($\ell+n$ ლუწია) და $U_{k_0,\ell} \neq \varnothing$

გარდა ამისა თუ
$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell}(\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)}|p(k)| = +\infty \tag{3.1}$$

მაშინ ნებისმიერი $\delta \in [0;\lambda]$ და $i \in N$ -თვის გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda-\delta}(\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)}[\rho_{\ell,i}(\sigma(k))]^{\delta}|p(k)| < +\infty \tag{3.2}$$

სადაც
$$\rho_{\ell,1}(k) = \left(\frac{1-\lambda}{\ell!(n-\ell)!}\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i}^{+\infty} j^{n-\ell-1}(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)}|p(j)|\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

(3.3)

$$\rho_{\ell,s}(k) = \frac{1}{\ell!(n-\ell)!}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i}^{+\infty} j^{n-\ell-1}(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)}|p(j)|(\rho_{l,s-1}(\sigma(j)))^{\lambda} \tag{3.4}$$

დამტკიცება: ვთქვათ $k_0 \in N$ და $U_{k_0,\ell} \neq \varnothing$. $U_{k_0,\ell}$ სიმრავლის განმარტების თანახმად (1.1) განტოლებას გააჩნია $u \in U_{k_0,\ell}$ ამონახსნი, რომლიც აკმაყოფილებს (1.3_ℓ) პირობას. (1.3_ℓ) პირობის თანახმად $\exists c>0$ და $k_1 \in N$ ისეთი, რომ

$$u(k) \geq ck^{\ell-1} \quad k \geq k_1$$

ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ (1.3_ℓ) და (3.1) მაშინ სრულდება (2.30). მართლაც:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell}(\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)}|p(k)| = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell}(\sigma^{\ell-1}(k))^{\lambda}|p(k)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell}(u(\sigma(k)))^{\lambda)}|p(k)| =$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell}\left|\Delta^{(n)}u(k)\right| = +\infty$$

ე.ი. სრულდება ლემა 2.6-ის პირობები, მაში სამართლიანია (2.34). თუ (2.34)-ში გამოვიყენებთ (1.1) განტოლებას და გავითვალისწინებთ (2.32) უტოლობას მივიღებთ:

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k) \geq \frac{1}{\ell!(n-\ell)!}\sum_{s=k_1}^{k-1}\sum_{j=s}^{+\infty} j^{n-\ell-1}|p(j)|(\Delta^{(\ell-1)}u(\sigma(j)))^{\lambda}(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)} \tag{3.5}$$

აღვნიშნოთ

$$x(k) \equiv \frac{1}{\ell!(n-\ell)!}\sum_{s=k_1}^{k-1}\sum_{j=s}^{+\infty} j^{n-\ell-1}|p(j)|(\Delta^{(\ell-1)}u(\sigma(j)))^{\lambda}(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)} \tag{3.6}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\Delta^{(\ell-1)}u(k)$ არაკლებადია (3.6)-დან (3.1) და (3.5)-ის თანახმად გვაქვს

$$\Delta x(k) = \frac{1}{\ell!(n-\ell)!}\sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-\ell-1}|p(j)|(\Delta^{(\ell-1)}u(\sigma(j)))^{\lambda}(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)}$$

$\Delta^{(\ell-1)}u(k)$ არაკლებადობის და $\sigma(k) \geq k+1$ გამო

$$\Delta x(k) \geq \frac{(\Delta^{(\ell-1)}u(k+1))^{\lambda}}{\ell!(n-\ell)!}\sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-\ell-1}|p(j)|(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)} \geq \frac{x^{\lambda}(k+1)}{\ell!(n-\ell)!}\sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-\ell-1}|p(j)|(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)}$$

აქედან მივიღებთ $$\sum_{j=k_1}^{k-1}\frac{\Delta x(j)}{x^{\lambda}(j+1)} \geq \frac{1}{\ell!(n-\ell)!}\sum_{j=k_1}^{k-1}\sum_{i=j}^{+\infty} i^{n-\ell-1}|p(i)|(\sigma(i))^{\lambda(\ell-1)} \tag{3.7}$$

მოვახდინოთ (3.7) უტოლობისმარცხენა მხარეში გარდაქმნა

$$\sum_{j=k_1}^{k-1}\frac{\Delta x(j)}{x^{\lambda}(j+1)} = \sum_{j=k_1}^{k-1} x^{-\lambda}(j+1)\int_{x(j)}^{x(j+1)} dt$$

რადგან $x^{-\lambda}(j+1) \leq t^{-\lambda}$ როცა $x(j) \leq t \leq x(j+1),$ მაშინ გვაქვს

$$\sum_{j=k_1}^{k-1}\frac{\Delta x(j)}{x^{\lambda}(j+1)} \leq \sum_{j=k_1}^{k-1}\int_{x(j)}^{x(j+1)} t^{-\lambda}dt = \int_{x(k_1)}^{x(k)} t^{-\lambda}dt$$

თუ გავითვალისწინებთ უკანასკნელს (3.7)-დან გვაქვს

$$x(k) \ge \left(\frac{1-\lambda}{\ell!(n-\ell)!} \sum_{i=k_1}^{k-1} \sum_{j=i}^{+\infty} j^{n-\ell-1} |p(j)| (\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

ე.ი. $$\Delta^{(\ell-1)} u(k) \ge \rho_{1,\ell,k_1}(k) \quad \text{როცა } k \ge k_1 \tag{3.8}$$

სადაც $$\rho_{1,\ell,k_1}(k) = \left(\frac{1-\lambda}{\ell!(n-\ell)!} \sum_{i=k_1}^{k-1} \sum_{j=i}^{+\infty} j^{n-\ell-1} |p(j)| (\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \tag{3.9}$$

(3.5)-დანგვექნება, რომ

$$\Delta^{(\ell-1)} u(k) \ge \frac{1}{\ell!(n-\ell)!} \sum_{s=k_1}^{k-1} \sum_{j=s}^{+\infty} j^{n-\ell-1} |p(j)| (\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)} (\rho_{s,\ell,k_1}(\sigma(j)))^{\lambda} \quad \text{როცა} \quad k \ge k_1 \quad s = 1,2,\ldots$$

სადაც $$\rho_{s,\ell,k_1} = \frac{1}{\ell!(n-\ell)!} \sum_{s=k_1}^{k-1} \sum_{j=s}^{+\infty} j^{n-\ell-1} |p(j)| (\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)} (\rho_{s-1,\ell,k_1}(\sigma(j)))^{\lambda} \tag{3.10}$$

ვთქვათ $\delta \in [0;\lambda]$ მაშინ (3.5)-დანმივიღებთ

$$\Delta^{(\ell-1)} u(k) \ge \frac{1}{\ell!(n-\ell)!} \sum_{s=k_1}^{k-1} \sum_{j=s}^{+\infty} j^{n-\ell-1} |p(j)| (\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)} (\rho_{s,\ell,k_1}(\sigma(j)))^{\delta} \left(\Delta^{(\ell-1)} u(\sigma(j)) \right)^{\lambda-\delta}$$

სადაც გვაქვს

$$\Delta^{(\ell-1)} u(k+1) \ge \frac{1}{\ell!(n-\ell)!} \sum_{s=k_1}^{k} \sum_{j=s}^{+\infty} j^{n-\ell-1} |p(j)| (\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)} (\rho_{s,\ell,k_1}(\sigma(j)))^{\delta} \left(\Delta^{(\ell-1)} u(\sigma(j)) \right)^{\lambda-\delta}$$

აქედან

$$\Delta^{(\ell-1)} u(k+1) \ge \frac{k-k_1}{\ell!(n-\ell)!} \sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-\ell-1} |p(j)| (\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)} \left(\rho_{s,\ell,k_1}(\sigma(j)) \right)^{\delta} (\Delta^{(\ell-1)} u(\sigma(j)))^{\lambda-\delta} \tag{3.11}$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა 1) $\delta = \lambda$ 2) $\delta \in [0;\lambda)$

1) შემთხვევაში (3.11)-დან გვაქვს

$$\frac{\Delta^{(\ell-1)} u(k+1)}{k+1} \ge \frac{k-k_1}{\ell!(n-\ell)!(k+1)} \sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-\ell-1} |p(j)| (\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)} \left(\rho_{s,\ell,k_1}(\sigma(j)) \right)^{\lambda}$$

ჩვენ ლემა 2.6-ის თანახმად გვაქვს, რომ $\dfrac{\Delta^{(\ell-1)}u(k)}{k}\uparrow$ როცა $k\to+\infty$ მაშინ

უკანასკნელი უტოლობიდან გვაქვს, რომ

$$\sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-\ell-1}|p(j)|(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)}\left(\rho_{s,\ell,k_1}(\sigma(j))\right)^{\lambda}<+\infty \tag{3.12}$$

სადაც ρ_{s,ℓ,k_1} მოცემულია (3.9) და (3.10) ფორმულებით.

განვიხილოთ 2)-შემთხვევა $\delta\in[0;\lambda)$, მაშინ (3.11)-დან გვაქვს

$$\Delta^{(\ell-1)}u(k+1)\geq\frac{k-k_1}{\ell!(n-\ell)!}\sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-\ell-1}|p(j)|(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)}\left(\rho_{s,\ell,k_1}(\sigma(j))\right)^{\delta}(\Delta^{(\ell-1)}u(j+1)^{\lambda-\delta}$$

საიდანაც გვაქვს

$$\frac{\Delta^{(\ell-1)}u(k+1)}{\sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-\ell-1}|p(j)|(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)}\left(\rho_{s,\ell,k_1}(\sigma(j))\right)^{\delta}\left(\Delta^{(\ell-1)}u(j+1)\right)^{\lambda-\delta}}\geq\frac{k-k_1}{\ell!(n-\ell)!}$$

თუ უტოლობის ორივე მხარეს ავიყვანთ $\lambda-\delta$ ხარისხში, გავამრავლებთ $k^{n-\ell-1}|p(k)|(\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)}\left(\rho_{s,\ell,k_1}(\sigma(k))\right)^{\delta}$ და შემოვიტანთ აღნიშვნას

$$a_k\equiv\sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-\ell-1}|p(j)|(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)}\left(\rho_{s,\ell,k_1}(\sigma(j))\right)^{\delta}(\Delta^{(\ell-1)}u(j+1)^{\lambda-\delta} \tag{3.13}$$

მივიღებთ

$$\frac{a_k-a_{k+1}}{a_k^{\lambda-\delta}}\geq\left(\frac{k-k_1}{\ell!(n-\ell)!}\right)^{\lambda-\delta}k^{n-\ell-1}|p(k)|(\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)}\left(\rho_{s,\ell,k_1}(\sigma(k))\right)^{\delta}\quad \text{როცა } k\geq k_1$$

თუ ამ უკანასკნელს ავჯამავთ k_1-დან k-მდე მივიღებთ

$$\sum_{s=k_1}^{k}\frac{a_s-a_{s+1}}{a_s^{\lambda-\delta}}\geq\left(\frac{1}{\ell!(n-\ell)!}\right)^{\lambda-\delta}\sum_{j=k_1}^{k}(j-k_1)\,j^{n-\ell-1}|p(j)|(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)}\left(\rho_{s,\ell,k_1}(\sigma(j))\right)^{\delta} \tag{3.14}$$

მოვახდინოთ გარდაქმნა

$$\sum_{s=k_1}^{k}\frac{a_s-a_{s+1}}{a_s^{\lambda-\delta}}=\sum_{s=k_1}^{k}a_s^{\delta-\lambda}\int_{a_{s+1}}^{a_s}dt\le\sum_{s=k_1}^{k}\int_{a_s}^{a_{s+1}}t^{\delta-\lambda}dt\le\int_0^{a_{k_1}}t^{\delta-\lambda}dt=\frac{a_{k_1}^{1+\delta-\lambda}}{1+\delta-\lambda}$$

ამიტომ (3.14)-დან გვაქვს

$$\sum_{j=k_1}^{k}(j-k_1)\,j^{\,n-\ell-1}\left|p(j)\right|(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)}\left(\rho_{s,\ell,k_1}(\sigma(j))\right)^{\delta}\le\frac{a_{k_1}^{1+\delta-\lambda}}{1+\delta-\lambda}$$

მაშასადამე

$$\sum_{j=k_1}^{k}(j-k_1)\,j^{\,n-\ell-1}\left|p(j)\right|(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)}\left(\rho_{s,\ell,k_1}(\sigma(j))\right)^{\delta}\le+\infty \tag{3.15}$$

რადგან $\dfrac{\rho_{s,\ell}(k)}{\rho_{s,\ell,k_1}(k)}\to 1$ როცა $k\to+\infty$

ამიტომ (3.16)-დან მივიღებთ (3.2) უტოლობას.

4. საკმარისი პირობები მონოტონური ამონახსნების არ არსებობის შესახებ

თეორემა 4.1 ვთქვათ სრულდება (1.4) ((1.5)), (3.1) პირობები $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$, $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) და $\delta \in [0;\lambda]$ რომელიმე და $i \in N$ -თვის

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda-\delta} \left(\sigma(k)\right)^{\lambda(\ell-1)} \left(\rho_{\ell,i}(\sigma(k))\right)^{\delta} |p(k)| = +\infty \tag{4.1}$$

მაშინნებისმიერი $k_0 \in N$ -თვის $U_{\ell,k_0} = \varnothing$, სადაც $\rho_{\ell,i}$ მოცემულია (3.3) (3.4) ტოლობებით.

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ არსებობს $k_0 \in N$ ისეთი, რომ $U_{\ell,k_0} \neq \varnothing$. მაშასადამე (1.1) განტოლებას აქვს წესიერი ამონახსნი $u : N_{k_0} \to (0;+\infty)$ რომელიც აკმაყოფილებს (1.2_ℓ) პირობას. რადგან 3.1 თეორემის ყველა პირობა დაცულია ამიტომ სრულდება (3.2) პირობა ნეისმიერი $\delta \in [0;\lambda]$ და $k \in N$ -თვის. რაც ეწინააღმდეგება (4.1) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

შედეგი 4.1 ვთქვათ სრულდება (1.4) ((1.5)). $\sigma(k) \geq k+1$, $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ სადაც $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) და რომელიმე $\gamma \in (0;1)$ -თვის

$$\liminf_{k\to+\infty} k^{\gamma} \sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-\ell-1} (\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)} |p(j)| > 0 \tag{4.2}$$

გარდა ამისა, რომელიმე $\delta \in [0;\lambda]$-თვის

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda-\delta} (\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)+\frac{\delta(1-\gamma)}{1-\lambda}} |p(k)| = +\infty \tag{4.3}$$

მაშინ ნებისმიერი $k_0 \in N$ $U_{\ell,k_0} = \varnothing$.

დამტკიცება: (4.2)-ის თანახმად ცხადია, რომ სრულდება (3.1) პირობა. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ საკმარისად დიდი k-თვის

$$\rho_{\ell,1}(k) \ge ck^{\frac{\delta(1-\gamma)}{1-\lambda}} \qquad (4.4)$$

(4.2)-ის თანახმად არსებობს c>0 და $k_0 \in N$ ისეთი, რომ

$$k^{\gamma}\sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-\ell-1}(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)}|p(j)| \ge c \text{ როცა } k \in N_{k_0}$$

თუ გამოვიყენებთ $\rho_{\ell,1}(k)$-ის განმართებას(3.3) გვექნება

$$\rho_{\ell,1}(k) = \left(\frac{1-\lambda}{\ell!(n-\ell)!}\sum_{i=1}^{k-1} i^{-\gamma} i^{\gamma}\sum_{j=i}^{+\infty} j^{n-\ell-1}(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)}|p(j)|\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \ge \left(\frac{1-\lambda}{\ell!(n-\ell)!}c\sum_{i=k_0}^{k-1} i^{-\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

ვისარგებლოთ უტოლობით $i^{-\gamma} \ge \xi^{-\gamma}$, როცა $i \le \xi \le i+1$ მაშინ უკანასკნელ უტოლობიდან მივიღებთ

$$\rho_{\ell,1}(k) \ge c_1\left(\sum_{i=k_0}^{k-1} i^{-\gamma}\int_i^{i+1} d\xi\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \ge \frac{c_1}{(1-\gamma)^{\frac{1}{1-\lambda}}}\left(k^{1-\gamma} - k_0^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \qquad (4.5)$$

სადაც $c_1 = \left(\frac{c(1-\lambda)}{\ell!(n-\ell)!}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}$

ამიტომ (4.3)-ის თანახმადთუ გავითვალისწინებთ (4.5) ცხადია სრულდება (4.1) როცა $i=1$. მართლაც განვიხილოთ (4.3) შემდეგი სახით:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda-\delta}\left(\sigma(k)\right)^{\lambda(\ell-1)}(\sigma(k))^{\frac{\delta(1-\gamma)}{1-\lambda}}|p(k)| = +\infty$$

(4.5)-ის გამოყენებით $\rho_{\ell,1}(\sigma(k)) \ge c\left(\sigma(k)\right)^{\frac{1-\gamma}{1-\lambda}}$ სადაც $c = \frac{c_1}{(1-\gamma)^{\frac{1}{1-\lambda}}}$ მაშინ (4.3) მიიღებს სახეს:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda-\delta}(\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)+\frac{\delta(1-\gamma)}{1-\lambda}}|p(k)| \le \sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda-\delta}(\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)}|p(k)|\left(\rho_{\ell,1}(k)\right)^{\delta} = +\infty$$

მაშინ მივიღეთ რომ ნებსმიერი $k_0 \in N$ $U_{\ell,k_0} = \varnothing$.

შედეგი 4.2 ვთქვათ სრულდება (1.4) ((1.5)). $\sigma(k) \ge k+1$, $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ სადაც $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია) და

$$\liminf_{k\to+\infty} k\sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-\ell-1}(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)}|p(j)| > 0 \tag{4.6}$$

გარდა ამისა თუ რომელიმე $\delta \in [0;\lambda]$-თვის

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda-\delta}(\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)}|p(k)|(\ln\sigma(k))^{\delta} = +\infty$$

მაშინ ნებისმიერი $k_0 \in N$-თვის $U_{\ell,k_0} = \varnothing$.

თეორემა 4.2 ვთქვათ სრულდება (1.4) ((1.5)), (3.1), (4.2) პირობები $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$, $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია) და როემლიმე $\alpha \in (1;+\infty)$-თვის

$$\liminf_{k\to+\infty} \frac{\sigma(k)}{k^{\alpha}} > 0 \tag{4.7}$$

გარდა ამისა თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობიდან ერთ-ერთი

$$\alpha\lambda \ge 1 \tag{4.8}$$

ან

$$\alpha\lambda < 1 \quad \text{და} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\frac{\alpha\lambda(1-\lambda)}{1-\alpha\lambda}-\varepsilon}(\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)}|p(k)| = +\infty \tag{4.9}$$

მაშინ ნებისმიერი $k_0 \in N$-თვის $U_{\ell,k_0} = \varnothing$.

დამტკიცება: თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ,რომრომელიმე $k \in N$-თვის და $\delta = \lambda$-თვის სრულდება (4.1) პირობა.

მართლაც (4.2)-ის თანახმად არსებობს $k_0 \in N$, $\alpha > 1$, $\gamma \in (0;1)$, $c > 0$ ისეთ, რომ

$$k^{\gamma}\sum_{j=k}^{+\infty} j^{n-\ell-1}(\sigma(j))^{\lambda(\ell-1)}\left|p(j)\right| > c \quad \text{როცა } k \in N_{k_0} \tag{4.10}$$

$$\sigma(k) \geq ck^{\alpha} \quad \text{როცა } k \in N_{k_0} \tag{4.11}$$

როგორც(4.1) შედეგის დამტკიცებისას ვაჩვენეთ სრულდება (4.5) პირობა. ამიტომ, რადგან $\rho_{\ell,1} \to +\infty$ როცა $k \to +\infty$.ამიტომ ზოგადობის დაურღვევლად ვიგლისხმოთ, რომ $\rho_{\ell,1} \geq 1$ როცა $k \geq k_0$. ამიტომ (4.10)-ის თანახმად (3.4) დან გვაქვს

$$\rho_{\ell,2} \geq \frac{c}{\ell!(n-\ell)!}\sum_{i=k_0}^{k-1} i^{-\gamma} \tag{4.12}$$

თუ მოვიქცევით ანალოგიურად როგორც ზემოთ მივიღებთ:

$$\rho_{\ell,2}(k) \geq \frac{c}{\ell!(n-\ell)!(1-\gamma)}(k^{1-\gamma}-1) \geq \frac{ck^{1-\gamma}}{2\ell!(n-\ell)!} \qquad k \geq k_2$$ საკმარისად დიდი k_2 -თვის.

თუ გავითვალისწინებთ უკანასკნელს (3.4)-დან გვექნება

$$\rho_{\ell,3}(k) \geq \left(\frac{c}{\ell!(n-\ell)!(1-\gamma)}\right)^{\lambda} \frac{c}{\ell 1(n-\ell)!}\sum_{i=k_1}^{k-1} i^{\alpha\lambda(1-\gamma)-\gamma} \tag{4.13}$$

განვიხილოთორი შემთხვევა 1) $\alpha\lambda(1-\gamma)-\gamma < 0$ 2) $\alpha\lambda(1-\gamma)-\gamma \geq 0$

1) შემთხვევაში როგორც ზემოთ ვაჩვენეთანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$\frac{c}{\ell!(n-\ell)!}\left(\frac{c}{2\ell!(n-\ell)!(1-\gamma)}\right)^{\lambda}\sum_{i=k_1}^{k-1} i^{\alpha\lambda(1-\gamma)-\gamma} \geq \frac{1}{1+\alpha\lambda}\left(\frac{1}{2\ell!(n-\ell)!(1-\gamma)}\right)^{\lambda+1} k^{(1-\gamma)(1+\alpha\lambda)} \quad \text{როცა}$$

$$k \geq k_3$$

სადაც $k_3 > k_2$ საკმარისად დიდი რიცხვია.

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა. მაშინ (4.13)-დან გვექნება

$$\rho_{\ell,3}(k) \ge \frac{c}{\ell!(n-\ell)!}\left(\frac{c}{2\ell!(n-\ell)!(1-\gamma)}\right)^{\lambda}\sum_{i=k_1}^{k-1} i^{\alpha\lambda(1-\gamma)-\gamma} =$$
$$= \frac{c}{\ell!(n-\ell)!}\left(\frac{c}{2\ell!(n-\ell)!(1-\gamma)}\right)^{\lambda}\sum_{i=k_1}^{k-1} i^{\alpha\lambda(1-\gamma)-\gamma}\int_{i-1}^{i} d\xi$$

რადგან $\alpha\lambda(1-\gamma)-\gamma \ge 0$ ამიტომ $i^{\alpha\lambda(1-\gamma)-\gamma} \ge \xi^{\alpha\lambda(1-\gamma)-\gamma}$ როცა $i-1 \le \xi \le i$ ამიტომ

$$\rho_{\ell,3}(k) \ge \frac{1}{1+\alpha\lambda}\left(\frac{c}{2\ell!(n-\ell)!(1-\gamma)}\right)^{\lambda+1}(k-1)^{(1-\gamma)(1+\alpha\lambda)} \qquad (4.14)$$

როცა $k \ge k_3 > k_2$ საკმარისად დიდი რიცხვია.

მაშასადამე ორივე შემთხვევაში შესრულდება (4.13) თუ გავაგრძელებთ ანალოგიურ შეფასებებს , $\forall m \in N$ -თვის $\exists k_{m+1} \in N$ ისეთი, რომ

$$\rho_{\ell,m}(k) \ge$$

$$\ge \frac{1}{(1+\alpha\lambda)(1+\alpha\lambda+\alpha^2\lambda^2)\ldots(1+\alpha\lambda+\ldots+(\alpha\lambda)^{m-2})}\left(\frac{c}{2\ell!(n-\ell)!(1-\gamma)}\right)^{\lambda+1+\lambda^2+..+\lambda^{m-2}}(k-m)^{(1-\gamma)(1+\alpha\lambda+\ldots+(\alpha\lambda)^{m-2}}$$

როცა $k \ge k_m$ საკმარისად დიდი რიცხვია.

ვთქვათ სრულდება (4.8) პირობა. შევარჩიოთ m ისეთი, რომ $(1-\gamma)(1-m) > \frac{1}{\lambda}$.

მაშინ (4.15)-ის თანახმად $\rho_{\ell,m}(k) \ge c_0(k-m)$ როცა $k \ge k_m$ სადაც $c_0 > 0$. ამიტომ (4.10)-ის თანახმად ცხადია სრულდება (4.1) პირობა როცა $\delta = \lambda$ და $i = m$. თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

ვთქვათ $\alpha\lambda < 1$ და ε რაიმე დადებითი რიცხვია. მაშინ (4.15)-დან გვაქვს $\rho_{\ell,m}(k) \ge c_0(k-m)^{\frac{\alpha\lambda(1-\gamma)}{1-\alpha\lambda}-\varepsilon}$ როცა $k \ge k_m$ სადაც $c_0 > 0$. ამიტომ (4.3)-ის ძალით ცხადია, რომ სრულდება (4.1) პირობა როცა $\delta = \lambda$. ამით თეორემის დამტკიცება დასრულებულია.

5. სხვაობიანი განტოლებები A თვისები

თეორემა 5.1 ვთქვათ სრულდება (1.4) (3.1) პირობებიდა ნებისმიერი $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$, $\ell + n$ კენტია და რომელიმე $\delta \in [0;\lambda]$ და $k \in N$ -თვის სრულდება (4.1) პირობა. გარდა ამისა თუ

$$\sum_{k=1}^{n} k^{n-1} p(k) = +\infty \tag{5.1}$$

როცა n კენტია გააჩნია A თვისება.

დამტკიცება: ვთქვათ (1.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი $u : N_{k_0} \to (0;+\infty)$ ამონახსნი ($u(k) < 0$ განიხილება ანალოგიურად) მაშინ სრულდება თეორემა 3.1-ის პირობები და მივიღებთ, რომ ნებისმიერი $\ell \in \{1,2,\dots,n-1\}$ – თვის, სადაც $\ell + n$ კენტია და $k \in N$ -თვის სრულდება

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda-\delta} \left(\sigma(k)\right)^{\lambda(\ell-1)} \left(\rho_{\ell,i}(\sigma(k))\right)^{\delta} |p(k)| < +\infty$$

რაც ეწინააღმდეგება (4.1) პირობას. ე.ი. $\ell \notin \{1,2,\dots n-1\}$. მაშასადამე $\ell = 0$ და n კენტია. ვაჩვენოთ, რომ (5.1)-ის თანახმად $u(k) \to 0$ როცა $k \to +\infty$. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ $\lim_{k\to\infty} u(k) = c > 0$. ამიტომ არსებობს $k_0 \in N$ ისეთი რომ

$$u(k) \geq \frac{c}{2} \quad \text{როცა} \quad k \in N_{k_0}$$

გავამრავლოთ (1.1) განტოლება k^{n-1} და ავჯამოთ k_0 -დან k -მდე. მაშინ გვექნება

$$\sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1} \Delta^{(n)} u(j) + \frac{c}{2} \sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1} p(j) \leq 0$$

თუ ვისარგებლებთ ნაწილობითად შეჯამებადობის ფორმულით გვექნება

$$\sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1} \Delta^{(n)} u(j) = k^{n-1} \Delta^{(n-1)} u(k+1) - (k_0 - 1)^{n-1} \Delta^{(n-1)} u(k_0) - \sum_{j=k_0}^{k-1} \Delta^{(n-1)} u(j) \Delta (j-1)^{n-1}$$

თუ გავაგრძელებთ ამ პროცესს მივიღებთ

$$\sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1}\Delta^{(n)}u(j)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\Delta^{(i)}(k-i)^{\to n-1}\Delta^{(n-i-1)}u(k+1)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\Delta^{(i-1)}(k_0-1-i)^{n-1}\Delta^{(n-i-1)}u(k_0)+\sum_{j=k_0}^{k}\Delta u(j)$$

მაშინ გვექნება, რომ

$$\sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1}p(j)\le\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\Delta^{(i-1)}\left(k_0-1-i\right)^{n-1}\Delta^{(n-i-1)}u(k_0)$$

თუ გადავალთ ზღვარზე უკანასკნელ უტოლობაში როცა $k\to+\infty$ მივიღებთ

$$\sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1}p(j)<+\infty$$

ეს კი ეწინააღმდეგება(5.1) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას

შედეგი 5.1 ვთქვათ სრულდება (1.4) (3.1) პირობები და ნებისმიერი $\ell\in\{1,\ldots,n-1\}$ სადაც $\ell+n$ კენტია სრულდება პირობები

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^{n-\ell-1+\lambda}(\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)}p(k)=+\infty \tag{5.2}$$

და კენტი n-ის შემთხვევაში სრულდება (5.1) მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

თეორემა 5.2 ვთქვათ სრულდება (1.4) პირობები და

$$\liminf_{k\to+\infty}\frac{(\sigma(k))^{\lambda}}{k}>0 \tag{5.3}$$

მაშინ იმისათვის რომ (1.1) განტოლებას გააჩნდეს A თვისება საკმარისია, რომ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-2+\lambda} p(k) = +\infty \tag{5.4}$$

დამტკიცება: თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ რომ (5.3) და (5.4)-ის თანახმად სრულდება (5.2) ნებისმიერი $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$-თვის. მართლაც (5.3)-ის თანახმად მოიძებნება ისეთი $k_0 \in N$ და $c > 0$, რომ $(\sigma(k))^{\lambda} > ck$ როცა $k \geq k_0$.

ამიტომ (5.4)-ის თანახმად გვაქვს $\sum_{k=k_0}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda} (\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)} p(k) =$

$c^{\ell-1} \sum_{k=k_0}^{+\infty} k^{n-2+\lambda} p(k) = +\infty$. მივიღეთ რომ სრულდება (5.2) პირობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5.3 ვთქვათ სრულდება (1.4) პირობები და

$$\limsup_{k\to+\infty} \frac{(\sigma(k))^{\lambda}}{k} < +\infty \tag{5.5}$$

მაშინ იმისათვის რომ (1.1) განტოლებას გააჩნდეს A თვისება საკმარისია შესრულდეს (5.1) პირობა და

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\lambda} (\sigma(k))^{\lambda(n-2)} p(k) = +\infty \tag{5.6}$$

დამტკიცება: (5.5)-ის თანახმად არსებობს $k_0 \in N$ და $c > 0$ ისეთი, რომ

$$\frac{(\sigma(k))^{\lambda}}{k} < c \qquad \text{როცა} \quad k \geq k_0 \tag{5.7}$$

ამიტომ $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda} (\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)} p(k) = \sum_{k=k_0}^{+\infty} k^{\lambda} k^{n-\ell-1} (\sigma(k))^{\lambda(n-2)} (\sigma(k))^{(\ell+1-n)\lambda} p(k)$

თუ ამ უკანასკნელს ჩავწერთ შემდეგი სახით $\sum_{k=k_0}^{+\infty} k^{\lambda} \left(\frac{k}{(\sigma(k))^{\lambda}} \right)^{n-\ell-1} (\sigma(k))^{\lambda(n-2)} p(k)$

მივიღებთ, რომ $$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda}(\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)}\,p(k) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\lambda}\left(\frac{1}{c}\right)^{n-\ell-1}(\sigma(k))^{\lambda(n-2)}\,p(k)$$

მაშასადამე (5.6)-ის თანახმად ნებისმიერი $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ -თვის სრულდება (5.2). რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

6. სხვაობიანი განტოლებები B თვისებით

თეორემა 6.1 ვთქვათ სრულდება (1.5) (3.1) პირობები და ნებისმიერი $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$, $\ell + n$ ლუწია და რომელიმე $\delta \in [0;\lambda]$ და $k \in N$ -თვის სრულდება (4.1) პირობა. გარდა ამისა თუ n ლუწია

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-1} \left| p(k) \right| = +\infty \tag{6.1}$$

მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია B თვისება.

დამტკიცება: ვთქვათ (1.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი ამონახსნი $u:[k_0;+\infty) \to R_+$ მაშინ თეორემა 3.1-ის პირობები სრულდება და მივიღებთ, რომ ნებისმიერი $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$, სადაც $\ell + n$ ლუწია და $k \in N$ -თვის სრულდება

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-\ell-1+\lambda-\delta} (\sigma(k))^{\lambda(\ell-1)} [\rho_{\ell,i}(\sigma(k))]^{\delta} \left| p(k) \right| < +\infty$$

რაც ეწინაამდეგება (4.1) პირობას. მაშასადამე $\ell \notin \{1,\dots,n-1\}$.

განვიხილოთ შემთხვევ, როცა $\ell = 0$ და n ლუწია. ლემა 2.4-ის ძალით

$$(-1)^i \Delta^{(i)} u(k) \geq 0, \quad \text{როცა} \quad \mathrm{k} \geq \mathrm{k}_1, \quad i = 0,\dots,n-1 \tag{6.2}$$

(6.2)-დან მივიღებთ, რომ

$$\left| \Delta^{(i)} u(k) \right| \downarrow 0 \qquad i = 0,\dots,n-1 \tag{6.3}$$

ვაჩვენოთ (6.3)-ის სამართლიანობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $\left| \Delta^{(i)} u(k) \right| \downarrow c$. მაშინ გვექნება $u(k) \geq c$. ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით (1.1) განტოლებიდან მივიღებთ

$$\Delta^{(n)} u(k) \geq \left| p(k) \right| c$$

მიღებული უტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ k^{n-1} და ავჯამოთ k_0-დან k-მდე

$$\sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1}\Delta^{(n)}u(j) \geq \sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1}|p(j)|c \tag{6.4}$$

მარცხენა მხარეში გამოვიენოთ ნაწილობითი შეჯამებადობის ფორმულა და ვიგულისხმოთ, რომ $n=2$

$$k\Delta u(k)-(k_0-1)\Delta u(k_0)-\sum_{j=k_0}^{k}\Delta u(j) \geq \sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1}|p(j)|c$$

თუ გავითვალისწინებთ (6.1)-ს (6.4)-დან მივიღებთ, რომ

$$\Delta u(k)\to+\infty, \text{ როცა } k\to+\infty .$$

რაც ეწინააღმდეგება (6.2). ე.ი. სამართლიანია (6.3).

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა, როცა $\ell=n$. მაშინ კვლავ ლემა 2.4-ის ძალით

$$\Delta^{(n-1)}u(k)\geq c>0$$

ლემა 2.6-ში დამტკიცებული (2.32) უტოლობიდან გვექნება

$$u(k)\geq Ck^{n-1} \tag{6.5}$$

სადაც $C=\dfrac{1+o(1)}{n!}c$.

განვიხილოთ (1.1) განტოლება და გავითვალისწინოთ (6.5), $\sigma(k)\geq k+1$, მაშინ

$$\Delta^{(n)}u(k)+p(k)C^{\lambda}k^{\lambda(n-1)}\geq 0$$

$$\Delta^{(n)}u(k)\geq |p(k)|C^{\lambda}k^{\lambda(n-1)}$$

ავჯამოთ k_0-დან k-მდე

$$\sum_{j=k_0}^{k}\left[\Delta^{(n-1)}u(j+1)-\Delta^{(n-1)}u(j)\right]\geq \sum_{j=k_0}^{k}\left|p(j)\right|C^{\lambda}k^{\lambda(n-1)}$$

$$\Delta^{(n-1)}u(k+1)-\Delta^{(n-1)}u(k_0)\geq \sum_{j=k_0}^{k}\left|p(j)\right|C^{\lambda}k^{\lambda(n-1)}$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.1) როცა $\ell = n$ გვექნება, რომ

$$\Delta^{(n-1)}u(k+1)\to +\infty, \text{ როცა } k\to +\infty$$

ე.ი. $\left|\Delta^{(i)}u(k)\right|\uparrow +\infty$, სადაც $i=0,\ldots,n-1$. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6.2 ვთქვათ სრულდება (1.5) პირობები და

$$\liminf_{k\to+\infty}\frac{(\sigma(k))^{\lambda}}{k}>0 \tag{6.6}$$

მაშინ იმისათვის რომ (1.1) განტოლებას გააჩნდეს B თვისება საკმარისია, რომ

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^{n-2+\lambda}\left|p(k)\right|=+\infty \tag{6.7}$$

დამტკიცება: (6.6)-ის თანახმად არსებობს $c>0$ და $k_0\in N$ ისეთი, რომ

$\sigma^{\lambda}(k)>ck$ როცა $k\geq k_0$

შევაფასოთ შემდეგი გამოსახულება, როცა $\delta=0$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^{n-\ell-1+\lambda-\delta}\left(\sigma(k)\right)^{\lambda(\ell-1)}\left(\rho_{\ell,i}(\sigma(k))\right)^{\delta}\left|p(k)\right|$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^{n-\ell-1+\lambda}\left(\sigma(k)\right)^{\lambda(\ell-1)}\left|p(k)\right|\geq \sum_{k=1}^{+\infty}k^{n-\ell-1+\lambda}c^{\ell-1}k^{\ell-1}\left|p(k)\right|=\sum_{k=1}^{+\infty}k^{n-2+\lambda}\left|p(k)\right|c^{\ell-1}$$

თუ ამ უკანასკნელში გავითვალისწინებთ (6.7) მივიღებთ, რომ სრულდება (4.1) პირობა და თუ $\ell+n$ ლუწია (1.1) განტოლებას გააჩნია B თვისება.

თეორემა 6.3 ვთქვათ სრულდება (1.5) პირობები და

$$\limsup_{k\to+\infty}\frac{(\sigma(k))^{\lambda}}{k}<+\infty \tag{6.8}$$

მაშინ იმისათვის რომ (1.1) განტოლებას გააჩნდეს B თვისება საკმარისია შესრულდეს (6.1) პირობა

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^{\lambda+1}\left(\sigma(k)\right)^{\lambda(n-3)}\left|p(k)\right|=+\infty \tag{6.9}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\sigma(k))^{\lambda(n-1)}=+\infty \tag{6.10}$$

დამტკიცება: (6.8)-ის თანახმად არსებობს $k_0\in N$ და $c>0$ ისეთი, რომ

$\dfrac{(\sigma(k))^{\lambda}}{k}<c$ როცა $k\geq k_0$

შევაფასოთ შემდეგი გამოსახულება $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k^{n-\ell-1+\lambda-\delta}\left(\sigma(k)\right)^{\lambda(\ell-1)}\left[\rho_{\ell,i}(\sigma(k))\right]^{\delta}\left|p(k)\right|$

როცა $\delta=0$ და გავითვალისწინოთ (6.9).

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^{n-\ell-1}k^{\lambda}\left(\sigma(k)\right)^{\lambda(\ell-1)}\left(\sigma(k)\right)^{\lambda(n-3)}\left(\sigma(k)\right)^{\lambda(3-n)}\left|p(k)\right|=\sum_{k=1}^{+\infty}k^{\lambda+1}k^{n-\ell-2}\left(\sigma(k)\right)^{\lambda(n-3)}\left(\sigma(k)\right)^{\lambda(\ell-n+2)}\left|p(k)\right|=$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^{\lambda+1}\frac{k^{n-\ell-2}}{\left(\sigma(k)\right)^{\lambda(n-\ell-2)}}\left(\sigma(k)\right)^{\lambda(n-3)}\left|p(k)\right|\geq\sum_{k=1}^{+\infty}k^{\lambda+1}\left(\frac{1}{c}\right)^{n-\ell-2}\left(\sigma(k)\right)^{\lambda(n-3)}\left|p(k)\right|=$$

$$=\frac{1}{C}\sum_{k=1}^{+\infty}k^{\lambda+1}\left(\sigma(k)\right)^{\lambda(n-3)}\left|p(k)\right|=+\infty$$

ლიტერატურა

1. R. koplatadze, On oscillatory properties of solutions of functional differential equations. Mem.Differential Equations Math.Phys. 3 (1994), 1-179.

2. R. koplatadze, On asymptotic behavior of solutions of n-th order Emden-Fovler differential equations with advanced argument. C zachoslovak Math. J. 60 (135) (2010), no 3,817-833.

3. R. koplatadze, Oscillation of linear difference equations with deviating arguments. Comp.Math.Appl. 42 (2001), 477-486.

4. R. koplatadze , E. Litsyn, Oscillation criteria fot higher order almost linear functional differential equation. Funct. Differ. Equ. 16(2009), N3, 387-434.

5. R. koplatadze, S. pinelas, Oscillation of nonlinear difference equations with delaued argument.Commnn. Appl. Anal. 16 (2012), N0, 1, 87-95.

6. R. koplatadze, S. pinelas, Oscillation criteria for first orderlinear difference equations with several delay arguments. Nonlinear Oscillations 17 (2014), N2, 247-267.